Deformațiile elastice ale sistemelor de bare

Elemente generale. Enunțuri

Principiul lucrului mecanic virtual se exprimă: „Pentru un sistem de forțe în echilibru, lucrul mecanic virtual, într-o deplasare virtuală, infinitezimală, compatibilă cu legăturile, este nul".

Lucrul mecanic virtual în cazul corpurilor deformabile este produs atât de forțele exterioare cât şi de cele interioare.

Teorema lui Clapeyron: „Dacă un corp elastic se găseşte în repaos, lucrul mecanic al forțelor exterioare este egal cu energia potențială de deformație acumulată în corp".

Lucrul mecanic exterior se înmagazinează în corp sub formă de energie potențială de deformație, reprezentând lucrul mecanic pe care îl execută eforturile interioare din corp. Considerându-se procesul de deformare reversibil, întregul lucru mecanic exterior sau întreaga energie potențială de poziție a forțelor exterioare se va transforma în energie potențială de deformație, iar la descărcare, aceasta va fi restituită integral (energia potențială de deformație nu depinde de modul în care sunt aplicate forțele exterioare asupra corpului, ci numai de intensitatea lor finală).

Teorema a 2-a a lui Clapeyron se enunță: „Lucrul mecanic efectuat de forțe exterioare acționând static asupra unui corp liniar elastic este independent de ordinea în care sunt aplicate aceste forțe şi este egal cu semisuma produselor fiecărei forțe prin deplasarea corespunzătoare".

Teorema lui Betti (a reciprocității lucrului mecanic exterior): „Lucrul mecanic produs de un grup de forțe P_i prin deplasările produse de un grup de forțe Q_j este egal cu lucrul mecanic produs de către un grup de forțe Q_j prin deplasările datorate grupului de forțe P_i".

Teorema lui Castigliano : „Derivata parțială a energiei de deformație în raport cu o sarcină oarecare P_i este egală cu deplasarea corpului solid Δ_i , produsă în dreptul şi pe direcția sarcinii P_i , atunci când corpul solid se încarcă în mod static cu un sistem oarecare de forțe şi cupluri". Astfel:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i},$$

cu ajutorul teoremei putând fi găsite atât săgeata v_i din dreptul şi pe direcția unei forțe concentrate Q_i, cât şi rotirea φ_j din dreptul şi pe direcția unui cuplu M_j :

$$v_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i}, \quad \varphi_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}.$$

Teorema lui Castigliano se utilizează la determinarea deplasărilor liniar-elastice şi la ridicarea nedeterminării barelor şi a sistemelor de bare; generalitatea teoremei rezidă în aplicabilitatea ei la corpuri elastice de orice formă, indiferent de natura încărcării.

Expresia deplasării punctuale pentru sisteme de bare drepte (expresia Maxwell – Mohr). Teorema lui Vereşceaghin

Prin aplicarea teoremei lui Castigliano asupra expresiei energiei de deformație, în cazul sistemelor de bare, se ajunge la expresia de forma:

$$\bar{1}\cdot\Delta_i + \sum_k \bar{r}_{ki}\cdot\Delta_k = \int n_i N\frac{ds}{EA} + \eta\int t_i T\frac{ds}{GA} + \int m_i M\frac{ds}{EI} + \int m_{ti} M_t\frac{ds}{GI_t} + \int n_i t\alpha ds + \int m_i \alpha\frac{t'}{h}ds$$

prin care se poate determina deplasarea oarecare Δ_i, la nivelul punctului (secțiunii) „i”, după o direcție dată, pentru orice încărcare, deplasări (cedări) de reazeme sau variații de temperatură, în cazul sistemelor static determinate. În expresia generală de mai sus s-au notat cu N, M, T, M_t – diagramele de efort datorate schemei inițiale de încărcare, t, t' - diagramele variației de temperatură, iar n_i , t_i , m_i , m_{ti} – diagramele de efort datorate încărcării în exclusivitate a sistemului inițial cu o sarcină virtuală unitară, de natura şi pe direcția deplasării căutate, sarcină ce acționează în punctul (secțiunea) „i”.

În cazul des întâlnit în practică, în care sistemul de bare este supus numai încărcărilor, în absența cedărilor de reazem sau a influenței variațiilor de temperatură, formula Maxwell – Mohr se poate rescrie în forma simplificată:

$$\bar{1}\cdot\Delta_i = \int n_i N\frac{ds}{EA} + \eta\int t_i T\frac{ds}{GA} + \int m_i M\frac{ds}{EI} + \int m_{ti} M_t\frac{ds}{GI_t},$$

remarcându-se, la numitorul fiecărui termen caracteristic, rigiditatea corespunzătoare solicitării pentru fiecare termen în parte.

Termenii din formulă, ce vor fi luați în considerare la determinarea unei deplasări oarecare, depind de categoria în care se înscrie elementul de structură (inclusiv schema de încărcare a acestuia) pentru care se face calculul;

se poate demonstra că, de exemplu, în siutația sistemelor de bare încărcate **în** planul lor (cadre încărcate în plan), ponderea maximă în cantitatea finală evaluată pentru deplasare este dată de termenul din moment încovoietor, aproximativ 98% din total.

În cazul barelor drepte sau a sistemelor de bare formate din bare drepte de rigiditate constantă – cel puțin pe intervale, pentru care diagramele n_i , t_i , m_i , m_{ti} reprezintă strict funcții liniare (fiind datorate unor încărcări tip sarcină unitară), a fost elaborată de integrare grafo-analitică denumită metoda Vereşceaghin.

Se admite situația unui sistem de bare încărcat în planul său, ce satisface condițiile inițiale de mai sus; luându-se în considerare doar diagramele de moment încovoietor pentru un tronson oarecare de bară, se obțin (vezi figura de mai jos):

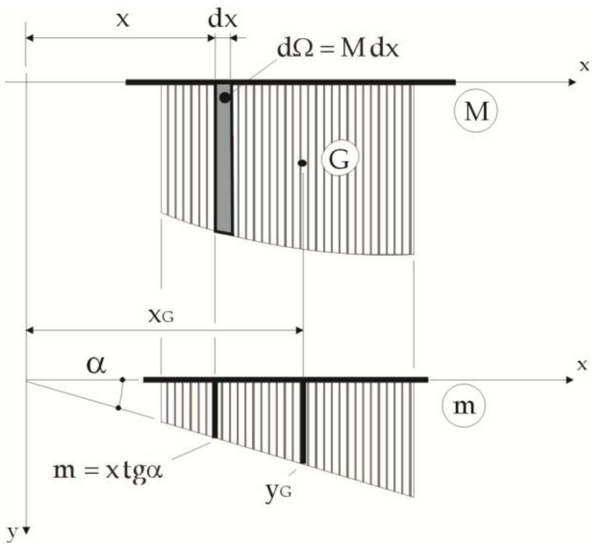


diagrama de moment încovoietor $M = M(x)$ de formă oarecare, datorată încărcării tronsonului cu sarcini inițiale, respectiv diagrama $m(x)$ cu variație liniară, din sarcina virtuală unitară $\overline{1}$. Se consideră elementul de arie din diagrama M, de forma $d\Omega = M\,dx$; în diagrama m, în dreptul secțiunii situate la distanța x în raport cu originea, ordonata este de forma $m = x\,\mathrm{tg}\alpha$.

Aplicând formula Maxwell – Mohr , ținându-se seama doar de termenul din moment încovoietor, se obține:

$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int m\,d\Omega = \frac{1}{EI}\int x\,tg\alpha\,d\Omega = \frac{tg\alpha}{EI}\int x\,d\Omega,$$

în care $\int x\,d\Omega = \Omega \cdot x_G$ reprezintă momentul static al ariei diagramei M, cu x_G - abscisa centrului de greutate al acestei suprafețe; în plus:

$$x_G\,tg\alpha = y_G,$$

cu y_G – ordonata din diagrama m, ordonată citită în dreptul centrului de greutate al ariei din diagrama M. Astfel, se ajunge la:

$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\Omega \cdot y_G,$$

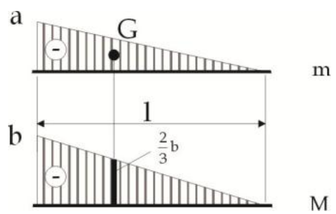
relație ce reprezintă **formula lui Vereşceaghin**, adică integrala produsului a două diagrame (de orice fel), dintre care una liniară, este egală cu produsul dintre aria diagramei curbilinii (neliniare) şi ordonata din cealaltă diagramă, ordonată citită în dreptul centrului de greutate al ariei porțiunii din diagrama curbilinie.

În situația în care ambele diagrame de efort au variație liniară, rolul celor doi termeni este interschimbabil (produsul este comutativ).

Reguli elementare de compunere (inmulțire a diagramelor)

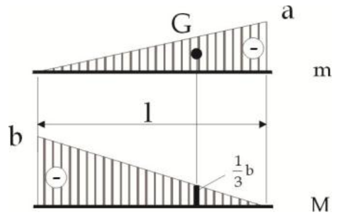
În general, o diagramă de formă complexă poate fi descompusă în figuri geometrice elementare în baza principiului suprapunerii liniare a efectelor; prin urmare, cazul general de integrare (înmulțire sau compunere) a două diagrame se reduce la unul sau mai multe cazuri elementare, de exemplu:

Triunghi-triunghi, cu bazele de aceeaşi parte



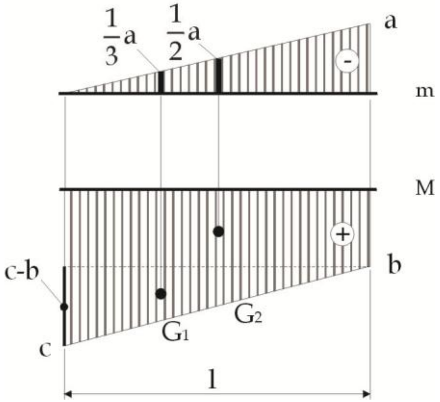
$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{a \cdot l}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}b\right)\right] = \frac{1}{EI}\frac{alb}{3};$$

Triunghi-triunghi, cu bazele opuse



$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{a\cdot l}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}b\right)\right] = \frac{1}{EI}\frac{a\,l\,b}{6};$$

Triunghi-trapez

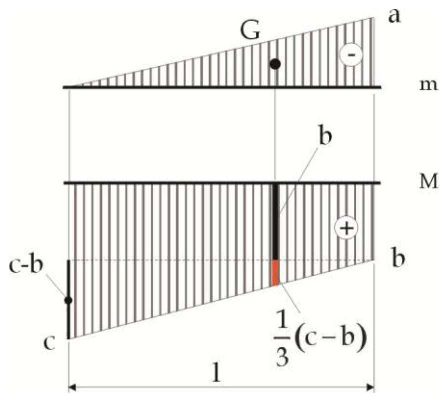


$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{(c-b)l}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}a\right)+b\cdot l\cdot\left(-\frac{1}{2}a\right)\right],$$

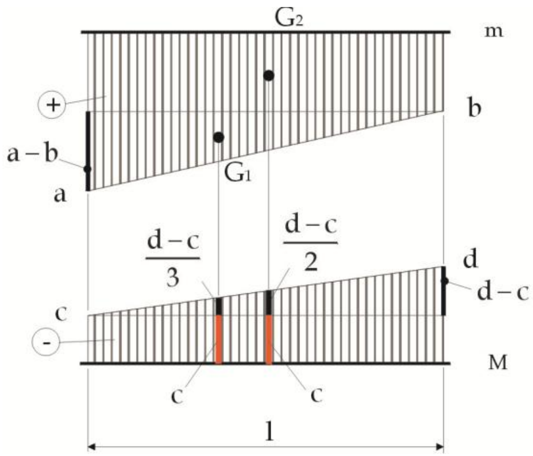
cu Ω din diagrama M, expresie mai lungă dar simplă, altfel:

$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{a\cdot l}{2}\right)\left(b+\frac{1}{3}(c-b)\right)\right],$$

cu Ω din diagrama m, expresie scurtă, sintetică (vezi figura de mai jos):

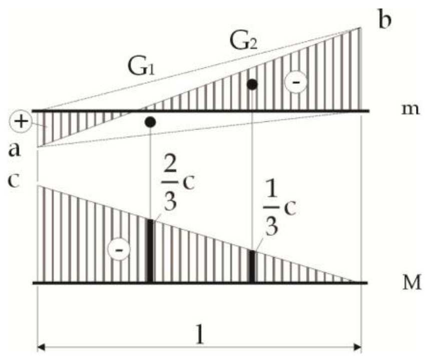


Trapez-trapez



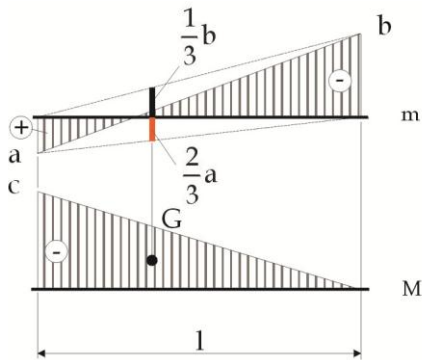
$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{(a-b)l}{2}\left(-\frac{d-c}{3}-c\right)+b\cdot l\left(-\frac{d-c}{2}-c\right)\right];$$

Triunghi-traversare



$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{a \cdot l}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}c\right) + \left(-\frac{b \cdot l}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}c\right)\right],$$

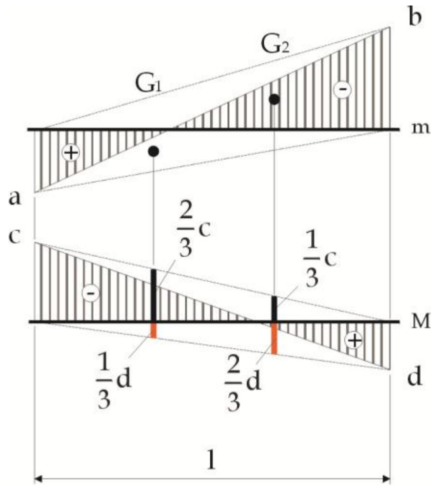
cu Ω din diagrama m , altfel:



$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{c \cdot l}{2}\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b\right)\right],$$

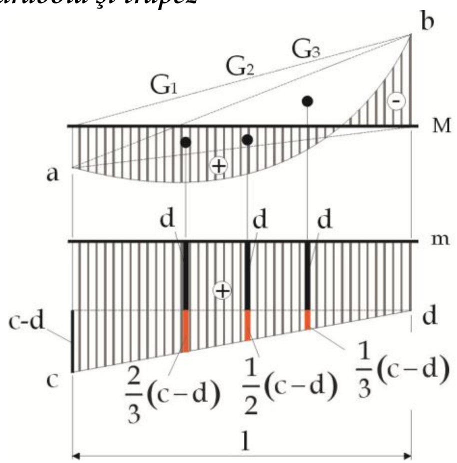
cu Ω din diagrama M;

Traversare-traversare



$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{a\cdot l}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}d\right)+\left(-\frac{b\cdot l}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}c+\frac{2}{3}d\right)\right];$$

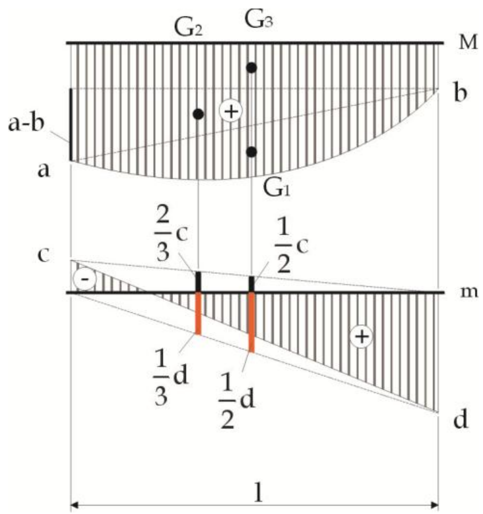
Traversare cu parabolă şi trapez



$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{a\cdot l}{2}\right)\left(d+\frac{2}{3}(c-d)\right)+\left(\frac{2}{3}l\cdot h\right)\left(d+\frac{1}{2}(c-d)\right)+\left(-\frac{b\cdot l}{2}\right)\left(d+\frac{1}{3}(c-d)\right)\right];$$

unde h – înălțimea parabolei de lungime l, parabolă datorată efectului sarcinii uniform distribuite de intensitate q ($h=\frac{ql^2}{8}$ - vezi seminar).

Trapez cu parabolă şi traversare



$$\int \frac{mM}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{2}{3}l\cdot h\right)\left(\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}c\right)+\left(\frac{(a-b)\cdot l}{2}\right)\left(\frac{1}{3}d-\frac{2}{3}c\right)+(b\cdot l)\left(\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}c\right)\right],$$

cu h de aceeaşi semnificație ca şi în cazul precedent.

Observație

Exemplele de mai sus reprezintă doar o parte din totalitatea celor posibile; relațiile obținute **nu** au un caracter universal, putând exista mai multe situații în funcție de aspectul, modul de poziționare şi/sau perechile de semne ale diagramelor de efort ce trebuie a fi compuse. Regula de compunere (teorema) Vereşceaghin este valabilă pentru toate tipurile de diagrame de efort secțional.