

Teorii de rezistență

Considerații generale

Starea de tensiune limită într-un punct. Tensiunea echivalentă

Starea de tensiune limită într-un punct corespunde trecerii dintr-un domeniu cu anumite proprietăți mecanice ale materialului, într-unul cu proprietăți mecanice diferite, domeniu a cărui evoluție ulterioară, sub încărcări superioare, constituie o stare periculoasă pentru exploatarea structurii în discuție.

Nivelul pe care starea de tensiune îl atinge într-un punct poate fi apreciat fie prin tensiuni sau deformații, fie prin energia de deformație.

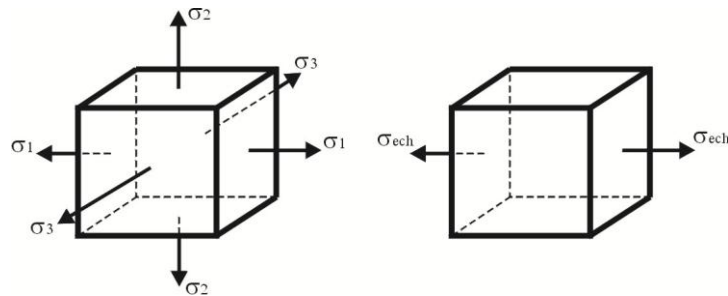
Parametrii ce corespund stării de tensiune limită pot fi determinați cu ușurință în cazul solicitărilor simple (întindere - compresiune, forfecare pură). Prin astfel de încercări se determină tensiunea limită care, la materialele ductile este considerată tensiunea de curgere σ_c , iar la materialele fragile (casante), tensiunea de rupere σ_r .

Într-un caz general de solicitare, ar trebui efectuate pentru fiecare material un număr mare de experimente, motiv pentru care s-a convenit ca, pentru aprecierea gradului de periculozitate al unei solicitări complexe (compuse), să se aleagă un factor care o caracterizează (tensiune, deformație, energie de deformație) care să se compare cu mărimea corespunzătoare stării de tensiune limită determinată printr-o încercare simplă.

Deoarece atingerea stării limită într-un punct depinde de mulți factori, având un caracter specific de la material la material și de la un tip de solicitare la altul, **nu poate fi găsit un criteriu unic**; de aici existența mai multor teorii ale stărilor de tensiune limită.

Drept factor caracteristic al stării de solicitare poate fi aleasă tensiunea normală maximă, deformația specifică liniară maximă, tensiunea tangențială maximă, energia potențială de deformație totală sau cea de deviație, fiecare conducând la o teorie de rezistență.

Pentru un anumit material se consideră două stări de tensiune, având același grad de periculozitate; o stare de tensiune este caracterizată de tensiunile principale σ_1, σ_2 și σ_3 , respectiv o stare de tensiune este de întindere simplă, caracterizată de tensiunea principală σ_{ech} (vezi figura de mai jos).



Tensiunea echivalentă reprezintă tensiunea normală principală care ar trebui produsă într-o epruvetă supusă la întindere simplă, pentru a se crea în aceasta o stare de tensiune cu același grad de pericolozitate ca și în cazul stării de tensiune inițiale.

Teoria tensiunii normale maxime (teoria I sau criteriul lui Coulomb)

Factorul preponderent este reprezentat de tensiunea normală maximă σ_{\max} ; un corp, într-un punct al său, atinge starea limită când tensiunea normală maximă atinge valoarea maximă de la sollicitarea de întindere simplă, indiferent de tipul de sollicitare (ipoteză inițial emisă de Galileo Galilei).

Notându-se cu σ_0 limita de curgere (σ_c) pentru materialele tenace sau rezistența de rupere (σ_r) pentru materialele casante, valori determinate experimental, în cazul stării de tensiune spațială se poate scrie (cu același σ_0 la întindere și compresiune):

$$\begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 \leq \sigma_0 \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_2 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_3 \leq \sigma_0 \end{aligned}$$

sau (pentru tensiuni σ_0 diferite la întindere - σ_{0t} și compresiune - σ_{0c}):

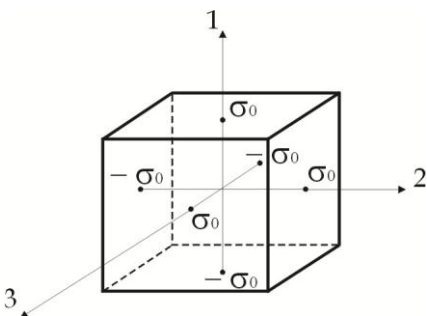
$$\begin{aligned} -\sigma_{0c} &\leq \sigma_1 \leq \sigma_{0t} \\ -\sigma_{0c} &\leq \sigma_2 \leq \sigma_{0t} . \\ -\sigma_{0c} &\leq \sigma_3 \leq \sigma_{0t} \end{aligned}$$

În cazul problemei plane ($\sigma_3 = 0$), relațiile precedente devin:

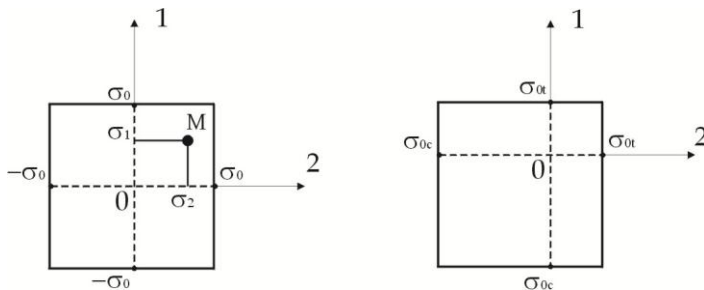
$$-\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_0 \quad \text{sau} \quad -\sigma_{0c} \leq \sigma_1 \leq \sigma_{0t}$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_0 \quad -\sigma_{0c} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{0t}$$

În reprezentare spațială (reprezentare Becker -Westergaard), la limită, condițiile de rezistență în punct reprezintă șase plane care formează un paralelipiped cu laturile egale cu $2\sigma_0$, suprafața acestuia reprezentând suprafața limită (vezi figura de mai jos).



În plan, reprezentarea condițiilor la limită conduce la un patrulater cu laturi $2\sigma_0$, astfel:



Punctele din interiorul cubului sau pătratului corespund unor stări de tensiune posibile în punct (nu conduc la starea de tensiune limită), iar punctele de pe suprafață (contur) sau din afara acestora reprezintă stări de tensiune limită, respectiv stări de tensiune care depășesc starea limită.

În cazul în care tensiunile limită la întindere și compresiune sunt diferite, domeniile de rezistență precedente se construiesc în mod analog prin scrierea corespunzătoare a condițiilor de rezistență la limită.

Critica teoriei

Teoria este infirmată de experimentele lui Föppl ; pentru o stare de compresiune uniformă triaxială (compresiune hidrostatică), se constată că starea limită se atinge pentru tensiuni σ care depășesc cu mult tensiunea σ_{0c} corespunzătoare compresiunii simple.

În cazul forfecării pure tensiunile principale sunt:

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = -\tau,$$

prin urmare materialul ar trebui să cedeze când:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{lim} = \sigma_0;$$

experimentele lui Bauschinger arată că cedarea survine pentru $\tau_{lim} = \frac{\sigma_0}{2}$, fiind astfel infirmată valabilitatea teoriei în discuție, pentru cazul forfecării pure.

Teoria tensiunii principale maxime dă rezultate satisfăcătoare numai la solicitarea de întindere în cazul materialelor casante (fragile).

Pentru tensiunile de exploatare, când se econsideră σ_c, σ_t ca având aceleași valori, criteriul de rezistență devine:

$$\sigma_{ech} = \max[|\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3|] \leq \sigma_a.$$

Pentru $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 < 0$, condiția de rezistență se exprimă în forma:

$$\sigma_{echt} = \max[\sigma_1; \sigma_2] \leq \sigma_{at};$$

$$\sigma_{echc} = |\sigma_3| \leq \sigma_{ac};$$

în mod obișnuit nu se dispune de valoarea tensiunii σ_{ac} ci numai de σ_{at} .

Teoria tensiunii tangențiale maxime (teoria III sau criteriul Tresca)

Factorul preponderent este reprezentat de tensiunea tangențială maximă τ_{max} ; un corp într-un punct al său atinge starea limită, indiferent de tipul de solicitare, când tensiunea tangențială maximă din acel punct atinge valoarea limită corespunzătoare solicitării de întindere simplă (teorie propusă de Coulomb - 1773 și reluată de Tresca - 1865).

Pentru a nu se atinge starea limită trebuie îndeplinite următoarele condiții:

$$\begin{aligned} -\tau_0 &\leq \tau_{12} \leq \tau_0 \\ -\tau_0 &\leq \tau_{23} \leq \tau_0, \\ -\tau_0 &\leq \tau_{31} \leq \tau_0 \end{aligned}$$

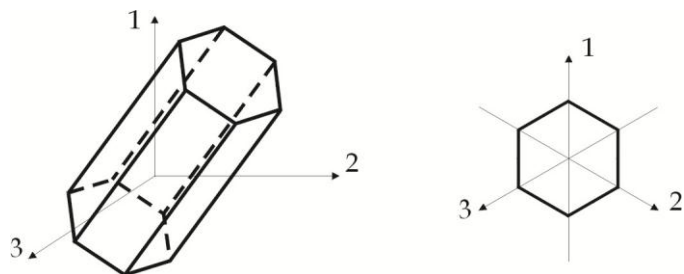
dar

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}; \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

astfel, se poate scrie:

$$\begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_0 \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_0. \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_0 \end{aligned}$$

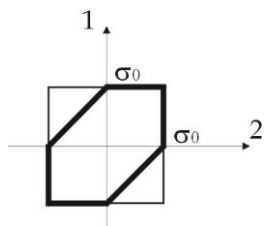
În reprezentarea grafică spațială (Becker - Westergaard), relațiile de forma $\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_0$ descriu șase plane paralele două câte două, egal înclinate în raport cu două axe și paralele cu cea de-a treia; aceste plane determină o prismă hexagonală de lungime infinită, a cărei axă este dreapta $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (vezi figura).



În cazul stării de tensiune plană ($\sigma_3 = 0$), condiția de rezistență este de forma:

$$\begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 \leq \sigma_0 \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_2 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_0 \end{aligned}$$

în reprezentare grafică fiind obținut un hexagon semiregulat (vezi figura de mai jos).



Critica teoriei

Experimentele lui Föppl efectuate pe cuburi de ciment, gresie, granit, la compresiune (pe o direcție și pe două direcții), au dus la concluzia că materialul cedează în ambele cazuri la valoarea tensiunii limită obținută pentru cazul compresiunii pe o singură direcție. Suprafața limită este deschisă în zona compresiunii triaxiale, fiind confirmate experimentele realizate pe trei direcții; suprafața limită este deschisă și în zona de întindere, ceea ce nu corespunde datelor experimentale.

Acest criteriu este verificat și în cazul forfecării pure, prin încercările lui Bauschinger.

Teoria nu poate ține seama de tensiunile limită diferite la întindere și compresiune ale materialului, neputând fi aplicată decât la materiale pentru care $\sigma_{at} = |\sigma_{ac}|$, cum este cazul oțelurilor.

Teoria nu ține seama, în cazul solicitării spațiale, de influența tensiunii principale σ_2 .

Teoria nu se aplică pentru stări de tensiune apropiate de întinderea triaxială.

Între tensiunile tangențiale și lunecările specifice asociate există o relație de proporționalitate. Apariția deformațiilor permanente la metale are loc ca urmare a lunecărilor care se produc în structura materialului, astfel încât criteriul tensiunii tangențiale maxime poate fi privit ca un criteriu de plasticitate (criteriu de curgere plastică), în timp ce teoria I reprezintă o teorie de rupere.

În exploatare, condiția la limită în spațiu se exprimă în forma:

$$\sigma_{ech} = \max[|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_1 - \sigma_3|] \leq \sigma_a,$$

iar în plan:

$$\sigma_{ech} = \max[|\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_2|] \leq \sigma_a.$$

Teoria energiei de deviație (teoria V sau IV_a ; criteriul lui von Mises - Henky)

Factorul preponderent în atingerea stării limită îl constituie energia specifică de deviație U_D .

Un corp atinge starea limită într-un punct al său, indiferent de tipul solicitării, când energia potențială de deformație (a variației formei) atinge valoarea corespunzătoare de la solicitarea de întindere simplă (criteriu de stare limită propus de Huber - 1904).

Pentru a nu se depăși starea limită trebuie îndeplinită condiția:

$$U_D \leq U_{D_0},$$

în care U_D reprezintă energia potențială de deviație (a variației formei) pentru un volum unitar, iar U_{D_0} este valoarea limită a aceleiași energii, obținută prin încercări prin solicitarea de întindere simplă. Se exprimă cele două energii potențiale de deviație, astfel:

$$U_D = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1),$$

$$U_{D_0} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_0^2;$$

condiția de rezistență se poate rescrie în forma:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 \leq \sigma_0^2$$

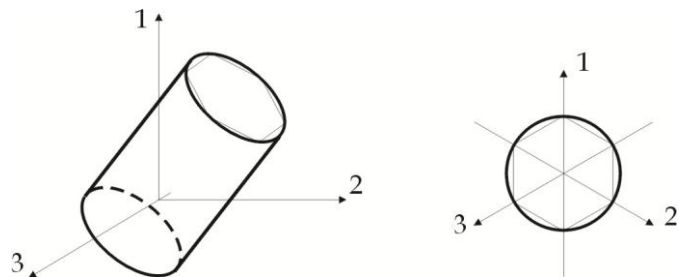
sau

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} \leq \sigma_0.$$

Ecuția suprafeței limită în reprezentarea Becker - Westergaard se obține din condiția de mai sus scrisă la limită:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 = \sigma_0^2$$

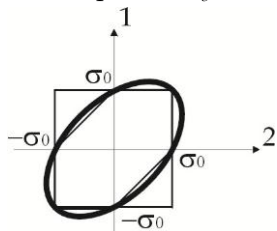
ce reprezintă un cilindru circular având axa egal înclinată față de axele de coordonate, cilindrul fiind circumscris prisme hexagonale din cazul teoriei tensiunilor tangențiale maxime (vezi figura de mai jos):



Pentru cazul stării de tensiune plană ($\sigma_3 = 0$), curba limită, reprezentând domeniul de rezistență, va fi o elipsă de forma:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2,$$

obținută prin intersecția cilindrului cu planul $\sigma_3 = 0$, astfel:



În cazul solicitării de forfecare pură $\sigma_1 = \tau$ și $\sigma_2 = -\tau$, prin introducerea celor două valori ale tensiunilor normale principale în expresia tensiunii echivalente obținându-se:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \tau\sqrt{3}, \quad \sigma_{ech} \leq \sigma_0,$$

adică

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_0,$$

valoare confirmată prin experimente.

În cazul solicitării de compresiune triaxială $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$, de unde rezultă:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{p^2 + p^2 + p^2 - p^2 - p^2 - p^2}, \quad \sigma_{ech} \leq \sigma_0,$$

adică $p = \frac{\sigma_0}{0} \rightarrow \infty$, valoare deasemenea verificată prin încercări.

Critica teoriei

Teoria ține seama de tensiunea principală σ_2 , a cărei influență a modificat prisma hexagonală din cazul teoriei tensiunilor tangențiale maxime în cilindrul corespunzător teoriei în discuție.

Suprafața limită fiind deschisă în zona întinderii uniforme triaxiale, criteriul este inaplicabil pentru cazul întinderii pe toate direcțiile.

Criteriul are în vedere numai materialele cu aceeași tensiune limită la întindere și compresiune simplă.

În cazul solicitării de întindere uniformă pe două direcții $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, astfel:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2 - \sigma^2} = \sigma,$$

fapt confirmat de experimente.

În cazul materialelor ductile, această teorie oferă condiția pentru apariția curgerii într-un punct, motiv pentru care criteriul energiei potențiale de deformație pentru modificarea formei reprezintă un criteriu de plasticitate (condiție de curgere), ca și criteriul anterior prezentat (criteriul tensiunii tangențiale maxime). Coincidența rezultatelor teoretice obținute cu cele experimentale face ca acest criteriu de rezistență să fie larg aplicat în cazul materialelor cu proprietăți plastice.

Aplicarea teoriilor de rezistență la calculul practic

Starea cea mai generală de solicitare în cazul unei bare se poate reduce la existența următoarelor tensiuni, astfel:

$$\sigma = \sigma_x; \quad \tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}.$$

Pentru a se verifica dacă starea de tensiune nu o depășește pe cea limită, se face verificarea:

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a.$$

Pentru determinarea lui σ_{ech} trebuie stabilită teoria de rezistență care se aplică, astfel se obțin:

- pentru teoria tensiunilor normale maxime (T_σ, T_I sau criteriul Coulomb):

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}|\sigma_x| + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_x\right)^2 + \tau^2} \leq \sigma_a;$$

- pentru teoria tensiunilor tangențiale maxime (T_τ, T_{III} sau criteriul Tresca):

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{|\sigma_x|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} - \frac{|\sigma_x|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2},$$

unde

$$\sigma_1 = \frac{|\sigma_x|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_2 = \frac{|\sigma_x|}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

În concluzie:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a;$$

- pentru teoria energiei de deviație (T_{ED}, T_{IV}, T_V sau criteriul von Mises - Henky):

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2 + \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 - \tau^2},$$

de unde rezultă:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_a.$$

În cazul solicitării axiale se aplică teoria T_σ , pentru orice alt tip de solicitare putând fi utilizate celelalte două teorii prezentate.

În cazul stării de forfecare pură ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$), tensiunea tangențială admisibilă, în baza teoriei tensiunilor tangențiale maxime, se calculează:

$$\sigma_{ech} = 2\tau_{max} \leq \sigma_a,$$

prin urmare:

$$\tau_a = 0,5\sigma_a;$$

în cazul teoriei energiei de deviație:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{3}\tau_{max} \leq \sigma_a,$$

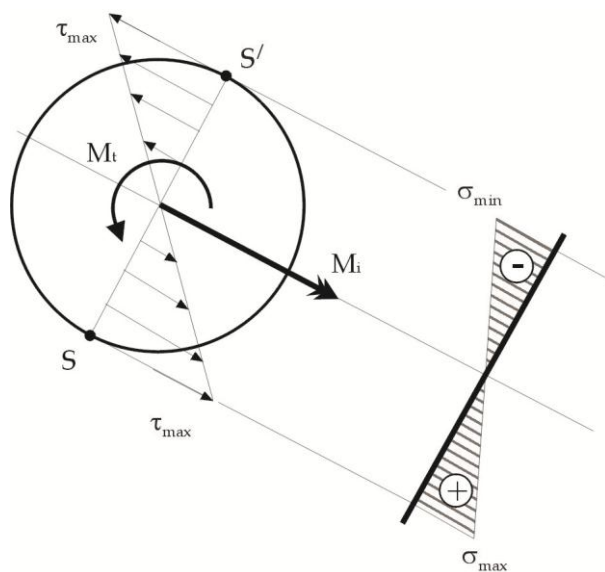
$$\tau_a = 0,577\sigma_a.$$

Încovoiere cu torsiune

Acțiunea simultană a solicitărilor de încovoiere și torsiune este frecventă cu deosebire în cazul organelor de mașini; arborii de transmisie constituie un exemplu tipic în acest sens.

În cazul barelor de rigiditate mare se poate presupune, cu suficientă exactitate, că cele două solicitări se produc fără a se influența reciproc. Starea de tensiune care ia naștere în bară va putea fi evaluată în baza principiului independenței acțiunii solicitărilor. Astfel, într-un punct al secțiunii transversale a barei, tensiunea normală se va determina ca și în cazul încovoierii simple sau duble, iar tensiunea tangențială, drept suma tensiunilor tangențiale datorate solicitărilor de încovoiere cu lunecare și torsiune. Cum tensiunile tangențiale în punctul cel mai solicitat al secțiunii pot atinge valori semnificative, nu se mai poate considera, ca până acum, o stare liniară de tensiune, ci se va ține seama de starea plană de tensiune care se produce în acest punct, urmând a se aplica un criteriu de stare limită pentru condiția de rezistență.

Pentru cazul barelor cu secțiune de formă circulară, se consideră secțiunea din figura de mai jos, solicitată fiind de către un moment încovoiător M_i și un moment de torsiune M_t .



Momentul încovoiitor M_i va produce tensiuni normale σ , iar momentul de torsiune M_t , tensiuni tangențiale τ ; aprecierea rezistenței barei în secțiune numai în baza tensiunilor normale și tangențiale maxime, cu expresiile:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i}{W_i} \quad \text{cu} \quad W_i = \frac{\pi d^3}{32},$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \quad \text{cu} \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16},$$

nu este suficientă, dată fiind starea de tensiune plană existentă în jurul unui punct din bară. Astfel, valorile tensiunilor normale principale sau ale tensiunilor tangențiale extreme pot depăși valorile date de expresiile corespunzătoare lui σ_{\max} și τ_{\max} .

Pentru evaluarea acestora se observă că în punctele S și S' tensiunea normală atinge valoarea maximă simultan cu tensiunea tangențială dată de momentul de torsiune. Pentru scrierea condiției de rezistență trebuie precizată teoria de rezistență care se va folosi, astfel:

$$\sigma_{\text{ech}} = \sigma_{\max} \cdot k_T \leq \sigma_a,$$

cu

$$k_T = k_\tau = \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^2}; \quad k_T = k_{ED} = \sqrt{1 + 3 \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^2},$$

coeficient corespunzător teoriei tensiunilor tangențiale maxime (T_τ), respectiv teoriei energiei de deviație (T_{ED}); prin înlocuirea tensiunilor cu expresiile acestora, se obține:

$$k_\tau = \sqrt{1 + \left(\frac{M_t}{M_i} \right)^2}; \quad k_{ED} = \sqrt{1 + 0,75 \left(\frac{M_t}{M_i} \right)^2}.$$

Condiția de rezistență devine:

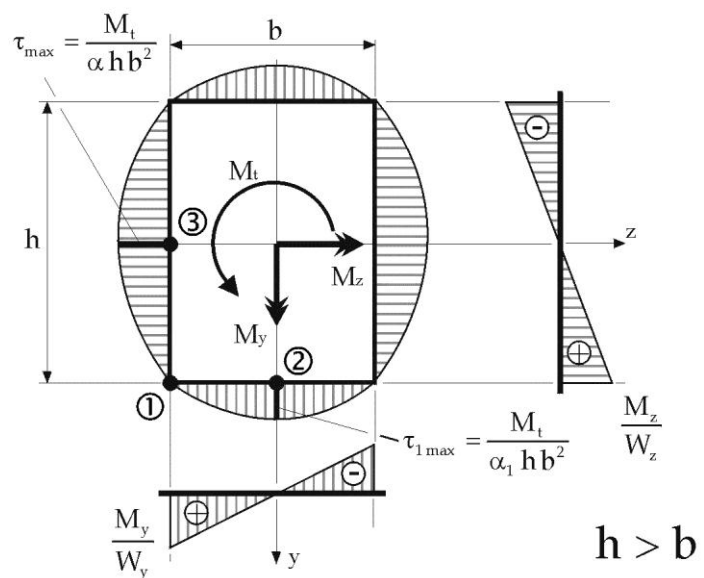
$$\sigma_{\text{ech}} = \frac{M_i}{W_i} \sqrt{1 + k_0 \left(\frac{M_t}{M_i} \right)^2} \leq \sigma_a,$$

cu $k_0 = 1$ pentru T_τ și $k_0 = 0,75$ pentru T_{ED} .

Condiția de rezistență de mai sus se poate transforma într-o relație de dimensionare, astfel:

$$W_{i \text{ nec}} = \frac{M_i}{\sigma_a} \sqrt{1 + k_0 \left(\frac{M_t}{M_i} \right)^2}.$$

Pentru cazul barelor cu secțiune dreptunghiulară, se consideră secțiunea din figura de mai jos, solicitată la încovoiere dublă prin momentele M_z și M_y și la torsiune prin momentul M_t .



Operația de dimensionare implică găsirea punctului periculos al secțiunii; se studiază toate punctele în care una din componentele tensiunilor este maximă, astfel: pentru punctul „1”:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}, \quad \tau = 0;$$

se face dimensionarea la încovoiere dublă:

$$W_{z \text{ nec}} = \frac{M_z}{\sigma_a} \left(1 + \frac{W_z}{W_y} \left| \frac{M_y}{M_z} \right| \right) = W_{z \text{ ef}} = \frac{bh^2}{6},$$

din care relație rezultă parametrii secțiunii b' și h' .

pentru punctul „2”:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z}, \quad \tau = \frac{M_t}{\alpha_1 h b^2};$$

se face dimensionarea la încovoiere cu torsiune:

$$W_{z \text{ nec}} = \frac{M_z}{\sigma_a} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^2} = W_{z \text{ ef}} = \frac{bh^2}{6},$$

de unde rezultă noua pereche de parametri geometrici, b'' și h'' .

pentru punctul „3”:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y}, \quad \tau = \frac{M_t}{\alpha h b^2};$$

se face dimensionarea la încovoiere cu torsiune:

$$W_{y \text{ nec}} = \frac{M_y}{\sigma_a} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^2} = W_{y \text{ ef}} = \frac{hb^2}{6},$$

de unde setul de valori b''' și h''' .

Dimensiunile finale ale secțiunii se obțin din relația:

$$(b, h) = \max \left[(b', h'); (b'', h''); (b''', h''') \right].$$