Sisteme static nedeterminate

În cazul în care numărul ecuațiilor de echilibru este mai mic decât numărul necunoscutelor de aflat pentru o structură dată (sistem de bare), atunci se spune că acest sistem este static nedeterminat; există două metode generale de rezolvare a unui astfel de sistem: metoda eforturilor şi metoda deplasărilor.

Metoda eforturilor, care este o metodă directă de rezolvare, are drept necunoscute reacțiuni sau eforturi care nu se pot determina direct din ecuațiile posibile de echilibru.

Metoda deplasărilor, care este o metodă indirectă, are drept necunoscute deplasări (translații sau rotiri), în funcție de care poate fi exprimată starea de deformație sau efort, în mod unic.

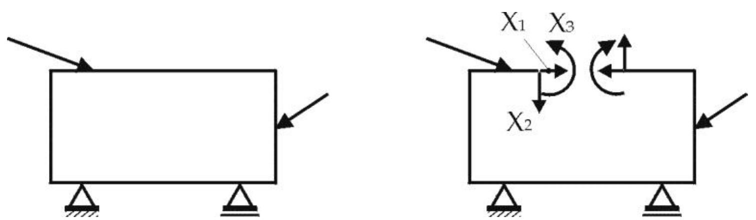
În cele ce urmează, se face referire la algoritmul general de ridicare a nedeterminării unei structuri, prin metoda eforturilor.

Stabilirea gradului de nedeterminare statică

Se stabileşte inițial gradul de nedeterminare statică a sistemului, adică numărul de forțe sau eforturi ce nu pot fi determinate din ecuațiile de echilibru. Între procedeele de găsire a gradului de nedeterminare a unei structuri se află:

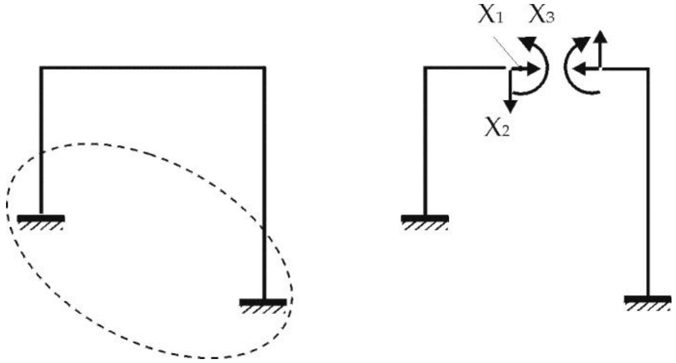
Procedeul contururilor închise

Se consideră sistemul de bare din figura de mai jos, sistem ce formează un contur închis; se secționează conturul şi se introduc cele trei eforturi secționale corespunzătoare, sistemul astfel modificat fiind static determinat.



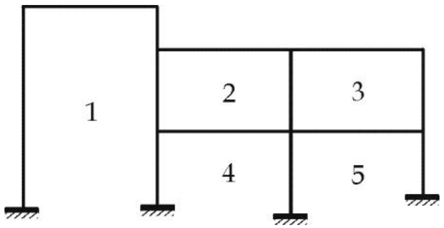
Aşadar, un contur închis, fără nici o discontinuitate a fibrei medii deformate şi a tangentelor sale (de exemplu, fără nici o articulație), este de trei ori static nedeterminat.

Tot un contur închis, însă prin teren, este cel din figura de mai jos:

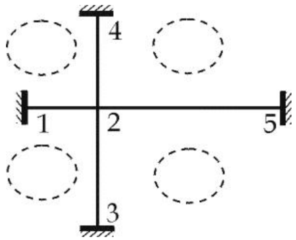


Dacă un sistem plan conține „k” contururi închise, fără discontinuități, gradul de nedeterminare statică al acestuia va fi $n = 3k$.

Astfel, pentru sistemul de bare din figura de mai jos, $k = 5$, de unde rezultă gradul de nedeterminare statică $n = 3 \cdot 5 = 15$.



Există situații, cum este cea a sistemului de bare din figura de mai jos, când pot apare contururi false, astfel:



după ce s-au parcurs barele care formează contururile 1-2-4-1, 2-4-5-2 şi 2-5-3-2, conturul 1-2-3-1 **nu conține nicio bară care să nu fi fost parcursă**, prin urmare ar fi vorba despre un contur fals. Gradul de nedeterminare statică este:

$$n = 3 \cdot 3 = 9; \quad (k = 3).$$

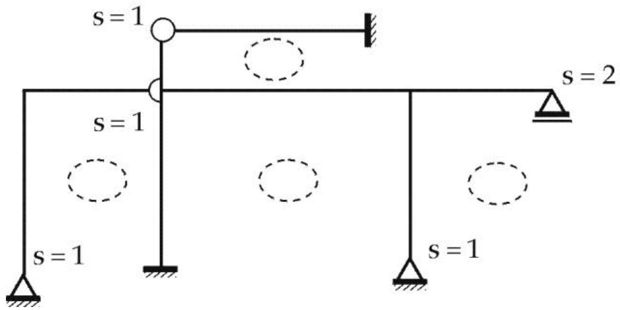
Dacă structura conține articulații interioare, reazeme articulate sau reazeme simple, deci prezintă discontinuități ale fibrei medii deformate şi ale tangentelor sale, acestea vor furniza condiții statice suplimentare care micşorează gradul de nedeterminare statică, în cazul sistemelor de bare plane:

$$n = 3k - \sum s,$$

unde $\sum s$ - numărul condițiilor statice suplimentare. Aceste condiții suplimentare sunt:

- pentru o articulație în care se întâlnesc un număr de două bare, $s = 1$;
- pentru o articulație în care se întâlnesc un număr de m bare, $s = m - 1$;
- pentru un reazem articulat, $s = 1$;
- pentru un reazem simplu, $s = 2$.

Astfel, pentru exemplul din figura de mai jos, $k = 4, \sum s = 6$ şi gradul de nedeterminare statică rezultă $n = 6$.



Procedeul barelor

Se consideră structura separată în bare şi noduri prin secțiuni efectuate lângă noduri.

Barele, din punct de vedere al modului de rezemare şi deci al numărului de necunoscute introduse, pot fi:

- încastrate la ambele capete, cu simbolul $\mathbf{b_{ii}}$ şi numărul de necunoscute introduse 3;
- încastrate la un capăt şi articulate la celălalt, cu simbolul $\mathbf{b_{ia}}$ şi numărul de necunoscute introduse 2;

- încastrate la un capăt şi simplu rezemate la celălalt, cu simbolul $\mathbf{b_{ir}}$ şi numărul de necunoscute introduse 1;
- articulate la ambele capete, cu simbolul $\mathbf{b_{aa}}$ şi numărul de necunoscute introduse 1.

Numărul total de necunoscute introduse de bare va fi:

$$B = 3b_{ii} + 2b_{ia} + b_{ir} + b_{aa}.$$

Reazemele structurii introduc necunoscute astfel:

- reazemele încastrate, cu simbolul $\mathbf{r_i}$ şi numărul de necunoscute introduse 3;
- reazemele articulate, cu simbolul $\mathbf{r_a}$ şi numărul de necunoscute introduse 2;
- reazeme simple, cu simbolul $\mathbf{r_s}$ şi numărul de necunoscute introduse 1.

Numărul total de necunoscute introduse de reazeme va fi:

$$R = 3r_i + 2r_a + r_s.$$

Nodurile micşorează gradul de nedeterminare statică prin ecuații de echilibru suplimentare, astfel, cu notațiile pentru:

- nodurile încastrate şi mixte (inclusiv reazeme), simbol $\mathbf{n_i}$;
- nodurile articulate (inclusiv reazeme), simbol $\mathbf{n_a}$;
- nodurile simplu rezemate (inclusiv reazeme), simbol $\mathbf{n_s}$,

numărul total de ecuații de echilibru în noduri va fi:

$$N = 3n_i + 2n_a + n_s.$$

Aplicând procedeul barelor, gradul de nedeterminare statică se calculează astfel:

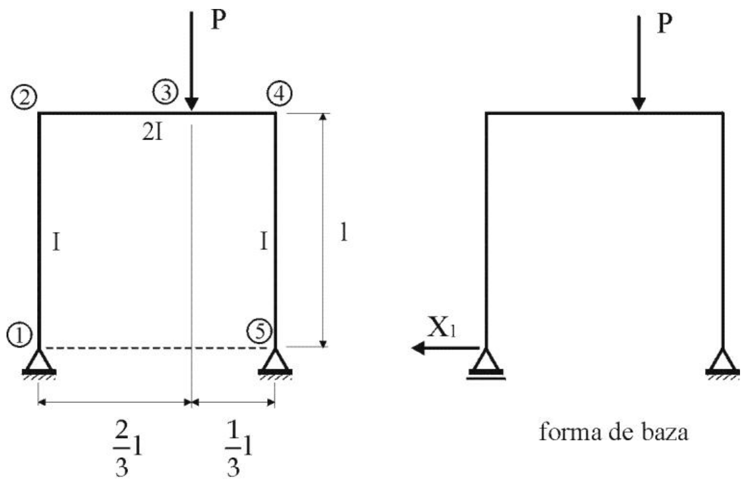
$$n = B + R - N,$$

ținându-se seama de notațiile de mai sus.

Stabilirea sistemului general de ecuații în metoda eforturilor. Structură o dată static nedeterminată

Se consideră sistemul static nedeterminat din figura de mai jos; etapele de rezolvare sunt următoarele:

- se stabileşte gradul de nedeterminare statică al sistemului; aplicând unul din procedeele expuse anterior sau făcând diferența dintre numărul de necunoscute şi numărul de ecuații de echilibru, se obține $n = 4 - 3 = 1$.



- se suprimă un număr de legături egal cu gradul de nedeterminare statică al structurii, în cazul de față se suprimă o legătură şi se introduce forța de legătură corespunzătoare notată cu X_1 ; sistemul astfel obținut este un sistem static determinat numit **formă de bază** a sistemului inițial (vezi figura de mai sus). Suprimarea legăturilor se poate face în orice secțiune a sistemului static nedeterminat, cu condiția ca forma de bază obținută să fie corectă, adică să constituie un sistem static determinat în ansamblu şi pe porțiuni.
- se pune condiția ca forma de bază, încărcată cu sarcina P şi cu necunoscuta X_1 să se comporte identic cu sistemul inițial; înseamnă că deplasarea pe orizontală a secțiunii „1”, Δ_1, a formei de bază încărcată simultan cu P şi X_1 să fie nulă, deoarece în sistemul inițial deplasarea pe orizontală în această secțiune nu este posibilă. Exprimarea condiției $\Delta_1 = 0$ constituie ecuația din care rezultă necunoscuta X_1 . Deplasarea Δ_1, fiind o funcție liniară de încărcări (P şi X_1), se poate exprima în baza principiului suprapunerii efectelor, astfel:

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11},$$

unde:

- Δ_{10} reprezintă deplasarea în secțiunea „1”, pe direcția necunoscutei X_1, produsă de încărcarea P pe forma de bază;

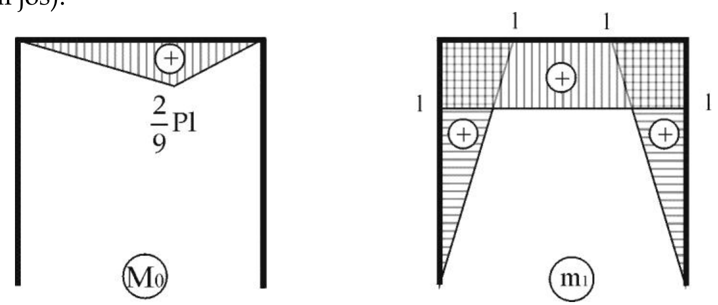
- Δ_{11} reprezintă deplasarea în secțiunea „1”, pe direcția necunoscutei X_1, produsă de forța necunoscută X_1 pe forma de bază.

Dar tot prin suprapunere de efecte se poate exprima $\Delta_{11} = \delta_{11} \cdot X_1$, cu δ_{11} deplasarea în secțiunea „1”, pe direcția necunoscutei X_1, produsă de $X_1 = 1$ pe forma de bază; în concluzie:

$$\Delta_1 = X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{10} = 0.$$

- se determină deplasările elastice δ_{11}, Δ_{10} și se rezolvă ecuația (de continuitate, scrisă în formă canonică) de mai sus.

Determinarea deplasărilor (punctuale), pe un sistem static determinat (forma de bază), se face cu ajutorul formulei Maxwell – Mohr. Se trasează diagramele de momente încovoietoare pe forma de bază încărcată cu $X_1 = 1$ și respectiv P. La calculul deplasărilor se poate neglija efectul forțelor tăietoare și axială; s-a notat cu „m_1” diagrama de moment corespunzătoare încărcării formei de bază cu $X_1 = 1$ și cu „M_0” diagrama de moment datorată încărcării formei de bază cu P(vezi figura de mai jos).



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}(m_1, m_1) = \frac{2}{EI}\frac{l \cdot l}{2}\frac{2}{3}l + \frac{1}{2EI} l \cdot l \cdot l = \frac{7l^3}{6EI};$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI}(m_1, M_0) = \frac{1}{2EI}\left(l \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{2}\frac{2Pl}{9} + l \cdot \frac{1}{3} l \cdot \frac{1}{2}\frac{2Pl}{9}\right) = \frac{Pl^3}{18EI}.$$

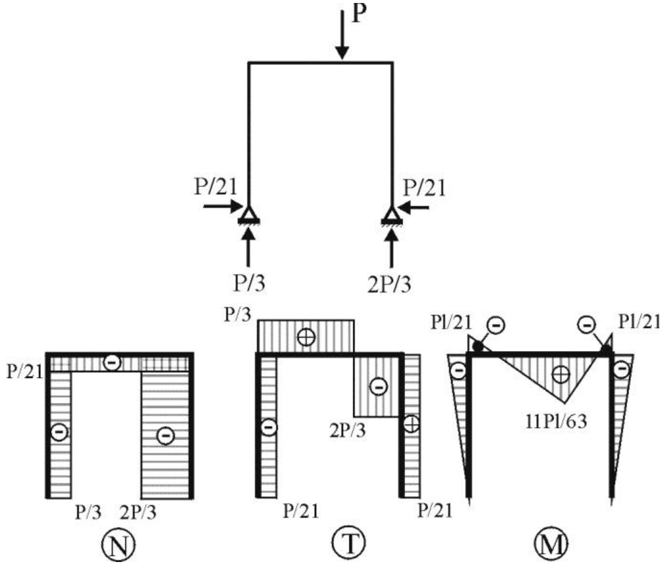
Prin rezolvarea ecuației de continuitate, rezultă:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{21}P.$$

- se trasează diagramele de efort finale, fie prin rezolvarea formei de bază încărcată cu P şi X_1 simultan, fie separat cu P şi X_1, utilizându-se mai apoi suprapunerea efectelor, astfel:

$$M = M_0 + X_1 \cdot m_1,$$
$$T = T_0 + X_1 \cdot t_1,$$
$$N = N_0 + X_1 \cdot n_1;$$

unde M_0, T_0, N_0 sunt diagramele de eforturi pe forma de bază încărcată cu P, respectiv m_1, t_1, n_1 diagramele de eforturi pe forma de bază încărcată cu $X_1 = 1$ (vezi figura de mai jos).



Stabilirea sistemului general de ecuații în metoda eforturilor. Structură de *n* ori static nedeterminată

Pentru un sistem de n ori static nedeterminat se suprimă un număr de n legături, pentru a se transforma sistemul într-unul static determinat - forma de bază a sistemului inițial. În locul celor n legături suprimate se introduc forțele sau cuplurile de legătură corespunzătoare X_1, X_2, ..., X_n.

Sub acțiunea încărcării inițiale (sarcinile P) şi a necunoscutelor X_1, X_2, ..., X_n, într-o secțiune oarecare „j” a formei de bază, secțiune în care a fost suprimată o legătură, se produce deplasarea Δ_j, după direcția necunoscutei X_j, care, în baza principiului suprapunerii efectelor, se scrie:

$$\Delta_j = X_1 \cdot \delta_{j1} + X_2 \cdot \delta_{j2} + \cdots + X_n \cdot \delta_{jn} + \Delta_{j0} \;;$$

în care:

- δ_{jn} este deplasarea în j pe direcția necunoscutei X_j, produsă de încărcarea $X_n = 1$, pe forma de bază.
- $X_n \cdot \delta_{jn}$ este deplasarea în j pe direcția X_j, produsă de încărcarea X_n, pe forma de bază.
- Δ_{j0} este deplasarea în j pe direcția X_j, produsă de sarcinile P, pe forma de bază.

Condiția de restabilire a continuității sistemului în j este $\Delta_j = 0$:

$$\Delta_j = X_1\delta_{j1} + \cdots + X_n\delta_{jn} + \Delta_{j0} = 0\,.$$

Relația de mai sus reprezintă condiția de continuitate pe direcția X_j; scriindu-se ecuații de continuitate asemenea condiției de mai sus pe direcția tuturor necunoscutelor, se obține sistemul de ecuații de forma:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \cdots + X_j\delta_{1j} + \cdots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{10} = 0 \;,\\
\Delta_2 &= X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \cdots + X_j\delta_{2j} + \cdots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{20} = 0 \;,\\
&\vdots\\
\Delta_j &= X_1\delta_{j1} + X_2\delta_{j2} + \cdots + X_j\delta_{jj} + \cdots X_n\delta_{jn} + \Delta_{j0} = 0 \;,\\
&\vdots\\
\Delta_n &= X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \cdots + X_j\delta_{nj} + \cdots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{n0} = 0 \;;
\end{aligned}$$

cu

$$\delta_{jh} = \int m_j m_h \frac{ds}{EI} + \int n_j n_h \frac{ds}{EA} + \int \eta \;\; t_j t_h \frac{ds}{GA}$$

şi

$$\Delta_{j0} = \int M_0 m_j \frac{ds}{EI} + \int N_0 n_j \frac{ds}{EA} + \int \eta \;\; T_0 t_j \frac{ds}{GA} \;;$$

unde:

- m_j, t_j, n_j sunt diagrame de eforturi din încărcarea formei de bază numai cu $X_j = 1$;
- m_h, t_h, n_h sunt diagrame de eforturi din încărcarea formei de bază numai cu $X_h = 1$;

- M_0, T_0, N_0 sunt diagrame de eforturi din încărcarea formei de bază numai cu sarcinile P.

La sistemele plane , ale căror bare sunt solicitate numai la încovoiere, se consideră numai influența momentului încovoietor; în cazul grinzilor cu zăbrele, se va ține seama doar de influența forțelor axiale, etc.

După rezolvarea sistemului de ecuații se obțin valorile $X_1, \ldots, X_n$. Diagramele de eforturi se calculează prin suprapunerea eforturilor:

$$M = M_0 + X_1 m_1 + X_2 m_2 + \cdots + X_n m_n \ ;$$
$$T = T_0 + X_1 t_1 + X_2 t_2 + \cdots + X_n t_n \ ;$$
$$N = N_0 + X_1 n_1 + X_2 n_2 + \cdots + X_n n_n .$$

Etapele de rezolvare a unui sistem static nedeterminat prin metoda eforturilor sunt:

1. stabilirea gradului de nedeterminare statică **n** a sistemului;
2. suprimarea a **n** legături și introducerea forțelor sau cuplurilor corespunzătoare X_1, X_2, ..., X_n, obținându-se astfel forma de bază a sistemului inițial;
3. scrierea sistemului de ecuații de continuitate (3);
4. încărcarea formei de bază, pe rând, cu fiecare din cele n necunoscute de valoare unitară:

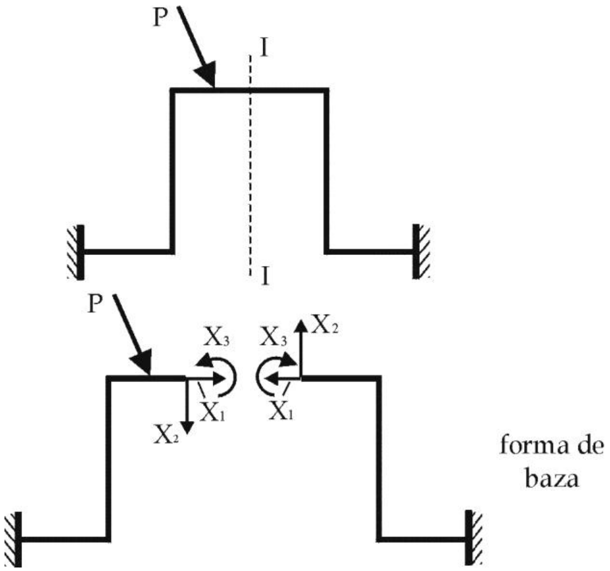
$$X_1 = 1 \ , \left(X_2 = X_3 = \ldots = X_n = 0\right) \ ;$$
$$X_2 = 1 \ , \left(X_1 = X_3 = \ldots = X_n = 0\right) \ ;$$
$$\vdots$$
$$X_n = 1 \ , \left(X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1} = 0\right) \ ;$$

și cu sarcinile P și apoi trasarea diagramelor de efort corespunzătoare.

5. determinarea deplasărilor δ_{jh} și Δ_{j0} ;
6. rezolvarea sistemului de ecuații;
7. trasarea diagramelor de efort prin suprapunerea efectelor sau prin rezolvarea formei de bază încărcată atât cu sarcinile P cât și cu forțele $X_1, \ldots, X_n$.

Simplificarea sistemului de ecuații de continuitate prin folosirea simetriei

Se consideră sistemul de trei ori static nedeterminat din figura de mai jos, sistem simetric față de axa I-I și încărcat cu forța P.

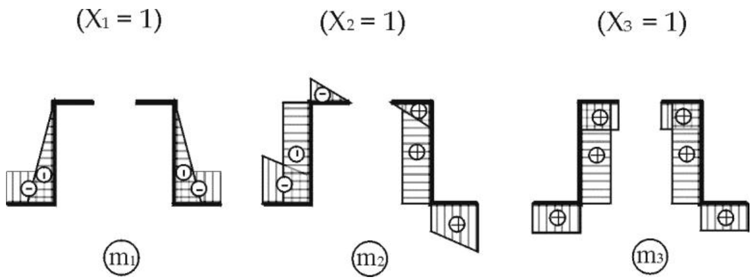


Forma de bază s-a obținut prin secționarea sistemului de bare la nivelul axei de simetrie a acestuia, introducându-se forțele de legătură corespunzătoare.

Sistemul de ecuații de continuitate este de forma:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{10} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{20} = 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{30} = 0. \end{cases}$$

Se trasează diagramele de moment încovoietor provenind din încărcarea formei de bază, pe rând, cu fiecare din cele trei necunoscute egale cu unitatea (vezi figura de mai jos), astfel:



Se observă că X_1 şi X_2 constituind încărcări simetrice, conduc la diagrame simetrice, X_2 fiind antisimetrică, se obține o diagramă corespunzătoare (m_2) antisimetrică; prin urmare, rezultă:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0;$$

$$\delta_{32} = \delta_{23} = 0,$$

aceşti termeni caracteristici provenind din integrarea (compunerea) unei diagrame simetrice cu una antisimetrică.

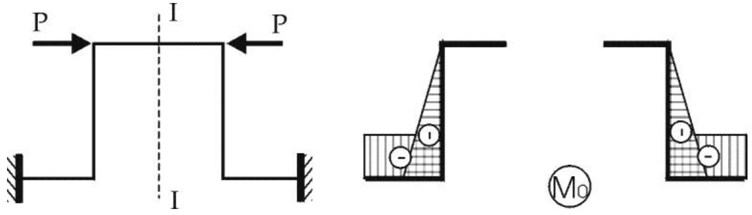
Rezolvarea sistemului de ecuații de continuitate se reduce la rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute şi a unei ecuații cu o necunoscută, astfel:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{10} = 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{30} = 0, \end{cases}$$

$$\delta_{22} X_2 + \Delta_{20} = 0.$$

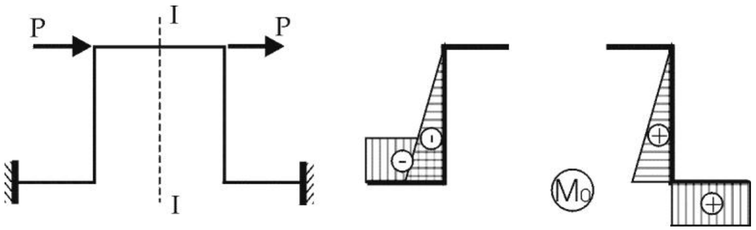
Când încărcarea P este simetrică sau antisimetrică față de axa I-I, atunci şi unii din termenii liberi ai ecuațiilor sistemului devin nuli.

În cazul în care încărcarea este simetrică (vezi figura de mai jos), diagrama M_0 va fi simetrică,



astfel, ($\Delta_{20} = 0 \Rightarrow X_2 = 0$), rămânând de rezolvat doar sistemul de două ecuații cu două necunoscute, din grupul de relații de mai sus.

Dacă încărcarea P este antisimetrică (vezi figura de mai jos), diagrama M_0 va fi antisimetrică,

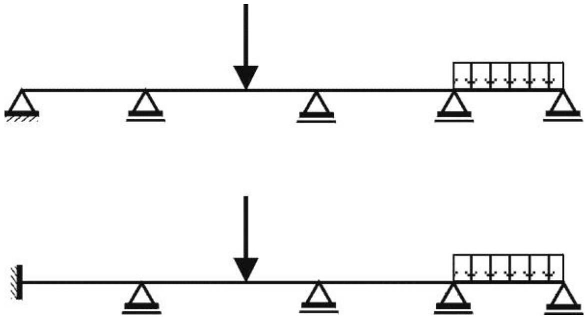


de unde rezultă $\Delta_{10} = 0$ și $\Delta_{30} = 0$, astfel $X_1 = X_3 = 0$, rămânând de rezolvat o singură ecuație din grupul inițial de relații de continuitate.

Grinzi continue

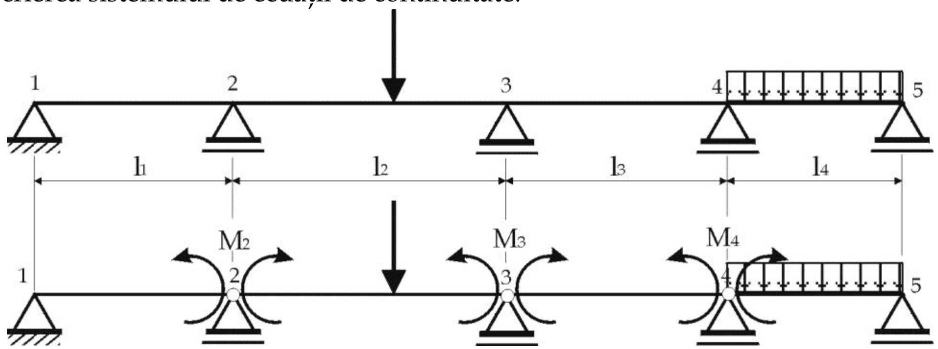
În cazul unor sisteme static determinate de factură particulară, se poate demonstra existența unui algoritm particular de rezolvare, astfel, în cazul așa-ziselor grinzi continue, sistemul de ecuații de continuitate are un aspect aparte, fiind compus din ecuații numite „ale celor trei momente" (Clapeyron).

Prin grindă continuă se înțelege structura obținută plecându-se de la o grindă simplu rezemată căreia, din rațiuni de sporire a rigidității, i s-au adăugat un număr de reazeme simple suplimentare; una din extremități poate deveni chiar încastrare (vezi figura de mai jos).



Pentru rezolvarea grinzilor continue poate fi utilizată metoda eforturilor, aşa cum a fost prezentată în paragrafele anterioare, sau se poate parcurge algoritmul „ecuațiilor celor trei momente”.

Fie grinda continuă din figura de mai jos, pentru care se intenționează scrierea sistemului de ecuații de continuitate.



La grinzile continue de tipul celei din figura de mai sus, gradul de nedeterminare statică este egal cu numărul de reazeme simple suplimentare situate pe deschiderea grinzii, în cazul nostru $n = 3$. Folosirea ecuațiilor celor trei momente reclamă utilizarea unei forme de bază particulare, pentru întocmirea căreia se introduc articulații intermediare suplimentare la nivelul fiecărui reazem simplu intermediar, la stânga şi la dreapta reazemelor astfel modificate apărând perechi de momente concentrate ce joacă rolul necunoscutelor de aflat; grinda continuă a fost transformată într-o succesiune de grinzi simplu rezemate, grinzi ce au reazeme comune.

Astfel, pentru exemplul de mai sus, sistemul de ecuații de continuitate se scrie prin exprimarea câte unei ecuații „a celor trei momente”(Clapeyron), în raport cu fiecare reazem modificat în parte; ca şi în cazul metodei generale de calcul, se va obține în final un sistem de n ecuații cu n necunoscute, unde n – gradul de nedeterminare statică a sistemului, astfel:

în raport cu reazemul 2

$$M_1 l_1 + 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + m_{21} l_1 + m_{23} l_2 = 0;$$

în raport cu reazemul 3

$$M_2 l_2 + 2M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 + m_{32} l_2 + m_{34} l_3 = 0;$$

în raport cu reazemul 4

$$M_3 l_3 + 2M_4 (l_3 + l_4) + M_5 l_4 + m_{43} l_3 + m_{45} l_4 = 0,$$

în care cu majuscule s-au notat momentele încovoietoare din reazemele în discuție, termenii tip m_{ij} servind la luarea în considerare în cadrul ecuației a acelor încărcări care n-au putut fi „prinse” în primii trei termeni ai ecuațiilor astfel scrise. Formula de calcul pentru un termen general (de încărcare) m_{ij} este:

$$m_{ij} = \frac{6}{l_{ij}^2} S_{ji},$$

unde l_{ij} reprezintă lungimea tronsonului cuprinsă între reazemele de rang i şi j, iar S_{ji} , momentul static al porțiunii din diagrama M_0, porțiune cuprinsă între limitele i şi j, în raport cu primul indice al lui S (j). La rândul său, diagrama M_0 reprezintă diagrama de moment încovoietor corespunzătoare încărcării formei de bază, în exclusivitate, cu acele încărcări care n-au putut fi luate în considerare în primii trei termeni ai ecuațiilor scrise.

Prin rezolvarea sistemului de ecuații astfel obținut se găsesc necunoscutele dorite, diagramele de efort finale fiind trasate pentru încărcarea simultană a formei de bază cu necunoscutele aflate şi încărcări inițiale (paşi similară cu cei de la cazul general prezentat).