Stabilitatea echilibrului elastic

Generalități

Studiul asupra solicitărilor simple şi compuse a urmărit determinarea eforturilor interioare pentru structuri considerate a fi în echilibru stabil, pentru care caz deformațiile elastice sunt atât de mici (ipoteza deformațiilor mici), încât acestea nu modifică forma generală a corpului – pentru creşteri mici ale forțelor exterioare corespund deformații mici proporționale.

Pot interveni cazuri în care starea de echilibru devine instabilă din punct de vedere elastic, adică nu mai este asigurată stabilitatea formei de echilibru – unor creşteri mici ale forțelor aplicate le pot corespunde creşteri foarte mari ale deformațiilor şi tensiunilor.

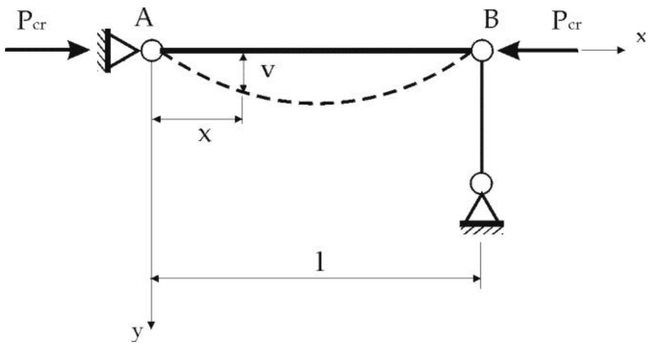
Trecerea formei deformate dintr-o poziție de echilibru stabil într-o poziție de echilibru instabil se mai numeşte şi **flambaj**; în asemenea situații echilibrul trebuie exprimat pe forma deformată a structurii în discuție, în plus, <u>nemaifiind valabil principiul suprapunerii efectelor</u>.

Calculul sarcinii critice de flambaj prin metoda statică, pentru bara dreaptă solicitată la compresiune. Formula lui Euler

Pentru aplicarea acestei metode se consideră o stare deformată posibilă a structurii, stare apropiată de forma inițială nedeformată a acesteia; se exprimă ecuațiile de echilibru în starea deformată considerată, se determină eforturile şi implicit deformata sistemului. Din condiția ca această deformată să coincidă cu cea inițial considerată, rezultă **sarcina critică de flambaj**.

Cu referire la bara dreaptă, există patru cazuri de flambaj, considerate clasice, funcție de modul de rezemare al barei la extremități; în cele ce urmează se studiază cazul fundamental al barei drepte dublu articulată la capete.

Fie cazul unei bare zvelte, dublu articulată la capete (vezi figura de mai jos), de rigiditate constantă pe lungime; bara se consideră comprimată de forța critică de flambaj P_{cr} (reazemul B este de tip pendul, pentru ca bara să poată lucra sub acțiunea forței), prin urmare forma deformatei barei ajunge conform liniei punctate din figură, astfel:



Pentru $P < P_{cr}$ bara s-ar găsi în echilibru stabil, iar pentru $P = P_{cr}$ bara este în echilibru indiferent (limita între echilibrul stabil şi cel instabil), în care situație, pe lângă forma rectilinie de echilibru a axei barei este posibilă şi o formă curbilinie de echilibru a acesteia.

Se consideră bara în starea deformată şi se ataşează sistemul de referință xOy (vezi figura de mai sus); unei secțiuni transversale oarecare situată la distanța x de originea sistemului de axe (A), îi corespunde, pe direcția Oy, deplasarea (săgeata) v.

Admițând pentru deplasările v valori mici, fibra medie deformată a barei se poate exprima prin ecuația diferențială aproximativă, de forma:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}.$$

În secțiunea transversală situată la distanța x de extremitatea A, considerată pe forma deformată a barei, se dezvoltă momentul încovoietor pozitiv, de forma:

$$M(x) = P_{cr} \cdot v;$$

ecuația diferențială a fibrei medii deformate devine:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{P_{cr}}{EI}v,$$

sau, cu notația $\frac{P_{cr}}{EI} = k^2$,

$$v^{//} + k^2 v = 0.$$

Ecuația diferențială astfel obținută este de ordinul doi, liniară, cu coeficienți constanți şi omogenă; soluția acesteia poate fi scrisă în forma generală:

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx,$$

cu C_1 şi C_2 constante de integrare ce urmează a fi determinate din condiții la limită. Din studierea schemei de rezemare a structurii, rezultă că la capetele barei săgețile trebuie să fie nule, altfel:

$$x = 0 \rightarrow v = 0;$$

$$x = l \rightarrow v = 0.$$

Din prima condiție rezultă $C_1 = 0$, iar cea de-a doua impune ca:

$$C_2 \sin kl = 0.$$

Constanta C_2 nu poate fi nulă, deoarece în acest caz ar rezulta $v = 0$ adică bara de formă rectilinie, contrar ipotezei că s-ar fi produs deja fenomenul studiat (flambaj). De asemenea, k nu poate fi zero, în care caz ar rezulta $P = 0$, adică bara neîncărcată (neinteresant), ultima posibilitate fiind $\sin kl = 0$, de unde rezultă:

$$k = \frac{n\pi}{l}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

În concluzie, sarcina critică de flambaj este de forma:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}.$$

Pentru $n = 1$ se realizează starea de flambaj din figura de mai sus; celelalte soluții, $n = 2, 3, \ldots$, conduc la valori majorate ale forței critice, valori care nu se mai ating, flambajul apărând pentru forța critică cea mai mică.

Când $n = 1$, ecuația fibrei medii deformate devine:

$$v = C_2 \sin \frac{\pi x}{l},$$

ce reprezintă o sinusoidă cu o semiundă.

Constanta C_2 nu poate fi determinată din condiții la limită, semnificația sa fizică fiind sugerată de impunerea parametrului x, astfel:

$$x = \frac{l}{2} \rightarrow C_2 = v_{max},$$

prin urmare, săgeata maximă a barei flambate.

O ultimă observație se referă la momentul de inerție de utilizat în formulă; se ştie că în planul unei secțiuni există două axe centrale principale de inerție, în raport cu care se exprimă momentele de inerție principale; flambajul se produce întotdeauna după direcția după care momentul de inerție este minim, formula generală după care se determină valoarea sarcinii critice de flambaj fiind de forma:

```
In[1]:= DSolve[Derivative[2][y][x] + k^2 * y[x] = 0, y[x], x]

Out[1]= {{y[x] → C[1] Cos[k x] + C[2] Sin[k x]}}
```

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_f^2}.$$

Aceasta reprezintă **formula lui Euler** pentru determinarea forței critice de flambaj, unde l_f reprezintă lungimea de flambaj a barei sau distanța dintre două puncte succesive de inflexiune a formei deformate de pierdere a stabilității; în cazul barei dublu articulate, $l_f = l$ (vezi exemple seminar).

Domeniul de valabilitate al formulei lui Euler

Se consideră formula lui Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_f^2},$$

exprimându-se momentul de inerție axial I_{min} prin raza de girație minimă i_{min}, astfe:

$$\left(i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}\right), \quad I_{min} = i_{min}^2 \cdot A,$$

formula Euler devenind:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot A \cdot i_{min}^2}{l_f^2}.$$

Efortul unitar normal critic (σ_{cr}) are expresia:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A},$$

sau din relația Euler,

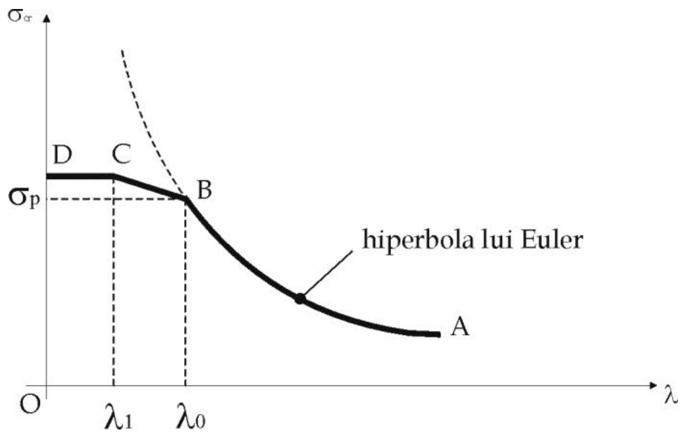
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_f}{i_{min}}\right)^2};$$

cu notația $\lambda \overset{not}{=} \frac{l_f}{i_{min}}$, relația de mai sus devine:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

ce reprezintă relația lui Euler pentru determinarea efortului unitar normal critic, cu λ – coeficient de sveltețe sau subțirime a structurii.

În reprezentarea grafică a relației de mai sus se ajunge la ecuația unei hiperbole cubice (hiperbola lui Euler); la stabilirea relației Euler s-a utilizat ecuația diferențială a fibrei medii deformate dedusă avându-se la bază **legea lui Hooke**. Astfel, relația Euler este valabilă doar pentru valori ale lui σ_{cr} care nu depăşesc valoarea tensiunii normale corespunzătoare limitei de proporționalitate a materialului (vezi figura de mai jos).



Rezultă condiția:

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_p ,$$

sau, cu relația întreagă:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p ,$$

de unde,

$$\lambda^2 \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_p} \Rightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} ;$$

cu notația $\lambda_0 \overset{not}{=} \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$, domeniul de valabilitate a formulei lui Euler va fi definit prin inegalitatea $\lambda \geq \lambda_0$.

Cu referire la reprezentarea grafică de mai sus, se disting:

- zona AB pentru care $\sigma_{cr} < \sigma_p$, ce corespunde **flambajului în domeniul elastic**, pentru care este valabilă legea lui Hooke; punctului B îi corespunde un coeficient de zveltețe λ_0. În cazul materialului OL37, valoarea coeficientului λ_0 se determină considerând $\sigma_p = 190\,N/mm^2$, astfel:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{190}} = 105.$$

- zona BC pe care $\sigma_{cr} > \sigma_p$, ce corespunde **flambajului în domeniul plastic**; pe această zonă $\lambda < \lambda_0$. Pentru valori $\lambda < \lambda_0$, σ_{cr} nu mai corespunde hiperbolei lui Euler. Valoarea tensiunii normale critice de flambaj se determină cu formule empirice bazate pe determinări experimentale ce oferă relații între σ_{cr} și λ în zona flambajului plastic; cea mai cunoscută și aplicată este formula Tetmajer – Iasinski, de forma:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda,$$

  relație corespunzătoare dreptei BC. Coeficienții a și b sunt constante dependente de material și se determină experimental (vezi tabele suport curs).
- punctul C corespunde unui coeficient de sveltețe λ_1; pentru $\lambda < \lambda_1$ se consideră că **bara nu mai flambează**, calculul făcându-se numai la compresiune simplă.

Calculul practic la flambaj

Formulele utilizate depind de domeniul efectiv de desfășurare a fenomenului (vezi paragraful anterior).

Pentru a <u>nu</u> se produce fenomenul de flambaj, valoarea forței axial – centrice de compresiune la care este supusă bara (respectiv a efortului unitar normal care se produce în secțiunea transversală a barei), trebuie să fie inferioară valorii critice de flambaj (respectiv efortului unitar normal critic); rezistența admisibilă la flambaj se determină cu relația:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c},$$

în care c – coeficient de siguranță la flambaj. Valorile orientative pentru coeficientul de siguranță la flambaj sunt, pentru domeniul pieselor de mașini - $c = 4 \div 28$, în funcție de importanța și caietul de sarcini al elementului considerat, respectiv $c = 1,6 \div 2,3$, pentru domeniul construcțiilor civile şi industriale. Elementul studiat se consideră a fi în echilibru stabil când:

$$c_{ef} = \frac{P_{cr}}{P} \geq c_a,$$

unde c_a - coeficientul de siguranță admisibil, la flambaj (vezi seminar).

Metoda lui Euler de calcul la flambaj a barelor drepte comprimate are dezavantajul că utilizează relații de calcul diferite, dependente de domeniul de flambaj. Acest neajuns poate fi eliminat prin utilizarea în calcul a rezistenței admisibile la flambaj σ_{af}, ca funcție de σ_{ac} şi un coeficient de flambaj φ, astfel:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi \overset{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{af}}{\sigma_{ac}}; \\ &\sigma_{ef} = \frac{P}{A_{ef}} \leq \sigma_{af} = \varphi \cdot \sigma_{ac}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_{ef} = \frac{P}{\varphi \cdot A_{ef}} \leq \sigma_{ac}.$$

Coeficientul de flambaj φ este subunitar şi este cu atât mai mic cu cât pericolul de flambaj este mai mare; valoarea sa depinde de coeficientul de sveltețe λ şi de materialul utilizat (vezi tabele suport curs, exemplu seminar).