

1.3 Caracteristici geometrice la suprafețe plane

Scopul acestui capitol este de a defini și a enunța algoritmi de calcul cu referire la caracteristicile geometrice ale suprafețelor plane.

Paragraful 1.3.1 face referire la definirea și algoritmi generici de calcul pentru coordonatele centrului de greutate, arii, momente statice și momente de inerție, fiind incluse și două exemple elementare de formă de secțiune transversală (dreptunghiulară și circulară plină).

Paragrafele 1.3.2÷1.3.5 tratează modul de variație al diverselor caracteristici geometrice în raport cu modificarea sistemului de axe de referință precum și unele din consecințele de ordin matematic și fizic ale acestora.

Timpul alocat pentru studiul capitolului 1.3, inclusiv pentru parcurgerea testelor de auto-evaluare este în jur de 2 ore.

După parcurgerea capitolului 1.3, studentul va fi capabil :

- să determine mărimile diverselor caracteristici geometrice necesare rezolvării oricărei aplicații de Rezistența Materialelor;
- să identifice și să corecteze în timp util eventuale greșeli de calcul;
- să identifice căile de optimizare a formei unei secțiuni transversale a unui tronson dat, funcție de diverse criterii de performanță.

1.3.1 Definiții. Algoritmi de calcul

Aria secțiunii. Momente statice. Centre de greutate

Dacă se consideră secțiunea transversală a barei ca fiind compusă dintr-o infinitate de arii elementare dA , [aria secțiunii](#) se poate calcula cu:

$$A = \int_A dA.$$

Se consideră o secțiune transversală de formă oarecare (vezi figura 1) și un sistem ortogonal de axe de coordonate y_1Oz_1 .

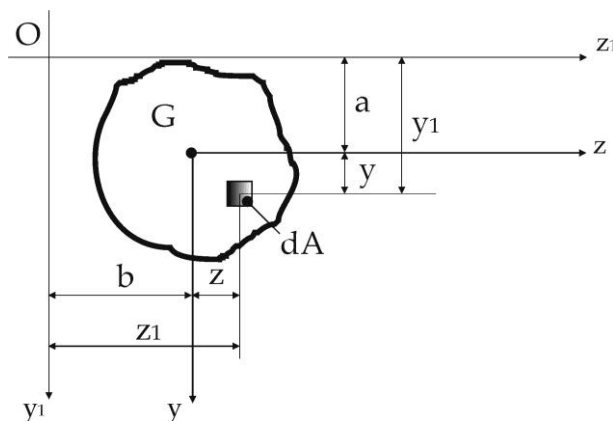


fig.1

Se definesc [momentele statice](#) ale secțiunii de mai sus, în raport cu axele y_1 sau z_1 , ca suma produselor ariilor elementare dA cu distanța la axa corespunzătoare, astfel:

$$S_{y_1} = \int_A z_1 \cdot dA, \quad S_{z_1} = \int_A y_1 \cdot dA;$$

unitatea de măsură pentru momentul static este $[L^3]$, (mm^3 , cm^3).

În situația în care se consideră un sistem de axe **centrale** de coordonate z și y (care trec chiar prin centrul de greutate al secțiunii), momentele statice corespunzătoare vor fi nule, astfel:

$$S_y = S_z = 0,$$

în care:

$$S_y = \int_A z \cdot dA, \quad S_z = \int_A y \cdot dA.$$

Folosind notațiile a și b din figura de mai sus, z și y vor putea fi exprimate:

$$y = y_1 - a, \quad z = z_1 - b,$$

obținându-se expresiile finale ale momentelor statice, de forma:

$$S_y = \int_A (z_1 - b) dA = \int_A z_1 dA - b \int_A dA = 0,$$

$$S_z = \int_A (y_1 - a) dA = \int_A y_1 dA - a \int_A dA = 0;$$

din ultimele egalități ale relațiilor de mai sus rezultă coordonatele **centrului de greutate** al suprafeței secțiunii transversale, în raport cu sistemul de coordonate arbitrar y_1Oz_1 , astfel:

$$a = y_{c.g.} = y_G = \frac{\int_A y_1 \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{S_{z_1}}{A};$$

$$b = z_{c.g.} = z_G = \frac{\int_A z_1 \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{S_{y_1}}{A}.$$

Aria unei secțiuni date nu poate avea decât semn pozitiv, pentru momente statice și coordonate ale centrului de greutate putând exista (în anumite situații) și valori negative.

Momente de inerție

Se numește **moment de inerție axial** al unei figuri plane de arie A , în raport cu o axă din planul său, suma produselor elementelor de arie dA cu pătratul distanței de la acestea la axa considerată. De exemplu, în raport cu axele centrale Oy și Oz , momentele de inerție axiale sunt:

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA;$$

momentele de inerție axiale nu pot avea decât valoare pozitivă.

Se numește **moment de inerție centrifugal** al unei figuri plane în raport cu un sistem ortogonal de axe dat, suma produselor elementelor de arie dA cu distanțele până la sistemul de axe de referință, astfel, pentru un sistem yOz :

$$I_{zy} = \int_A yz dA,$$

sumă ce poate fi de ambele semne.

Se numește **moment de inerție polar** al unei figuri plane în raport cu un punct (pol) din planul figurii, suma produselor elementelor de arie dA cu pătratele distanțelor lor în raport cu acel punct:

$$I_p = \int_A r^2 dA;$$

deoarece $r^2 = y^2 + z^2$ (vezi figura 2):

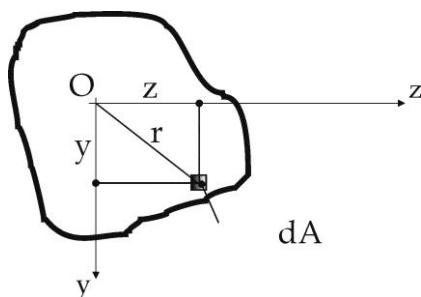


fig.2

rezultă:

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y.$$

Prin urmare, momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale, pentru orice sistem de axe ortogonale care trec prin polul dorit. Prin extensie, rezultă că suma momentelor de inerție axiale în raport cu un sistem de axe rectangulare cu aceeași origine, O, reprezintă un **invariant la rotirea sistemului de axe**.

Momentele de inerție de orice fel se măsoară în unități de lungime la puterea a patra, $[L^4]$, (mm^4 , cm^4).

Dacă axele de referință sunt axe centrale (trec prin centrul de greutate al secțiunii), momentele de inerție se vor numi și ele centrale.

Uneori, în calcule se utilizează razele de inerție (de girație), mărimi liniare ce pot fi definite prin expresiile:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}}.$$

Exemple elementare

Secțiune de formă dreptunghiulară

Se consideră secțiunea de laturi b și h (notații tradiționale; $b < h$), pentru care se dorește determinarea momentelor de inerție axiale în raport cu axele centrale ale figurii (vezi figura 3).

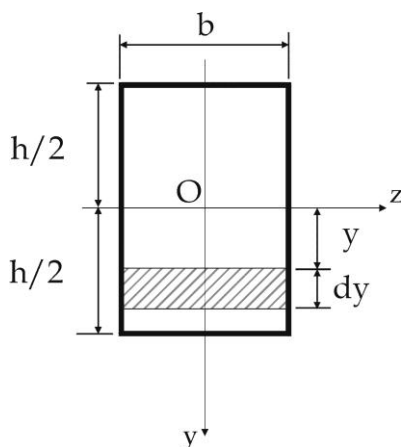


fig.3

Pentru determinarea momentului de inerție în raport cu axa Oz, se consideră o suprafață elementară dA de forma unei fâșii paralele cu axa în discuție (Oz), de lățime b și înălțime dy; prin aplicarea relației de definiție a momentului de inerție axial, se obține:

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8} \right) \right),$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12};$$

în mod similar, se determină:

$$I_y = \int_A z^2 dA = \frac{hb^3}{12}.$$

Momentul de inerție centrifugal în raport cu sistemul de axe yOz este **nul**, deoarece axele de referință sunt **axe de simetrie** pentru suprafața dată.

Secțiune de formă circulară

Se consideră secțiunea circulară plină din figura 4.

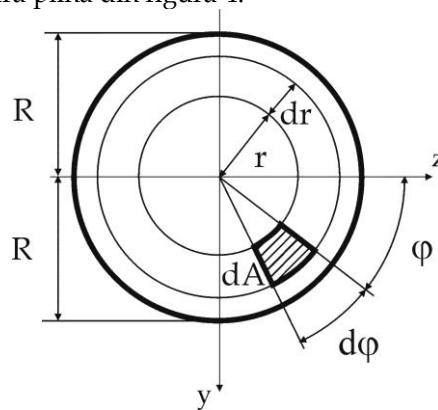


fig.4

Avându-se în vedere simetria secțiunii în raport cu oricare axă centrală, se va determina mai întâi momentul de inerție polar și apoi momentele de inerție în raport cu axele centrale; elementul de arie dA este cuprins între două raze care fac între ele unghiul $d\varphi$ și două cercuri concenrice de raze r , respectiv dr . Cu relațiile discutate la paragraful anterior, se obțin:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A r^3 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32};$$

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

1.3.2 Variația momentelor de inerție la translația axelor

Se consideră o figură plană de arie A raportată la un sistem de axe ortogonale yOz , pentru care **sunt cunoscute** momentele de inerție raportate la axele Oy și Oz ; interesează expresiile momentelor de inerție în raport cu axele unui alt sistem de referință ortogonal ce are axele paralele cu sistemul inițial (vezi figura 5 - $y_1O_1z_1$).

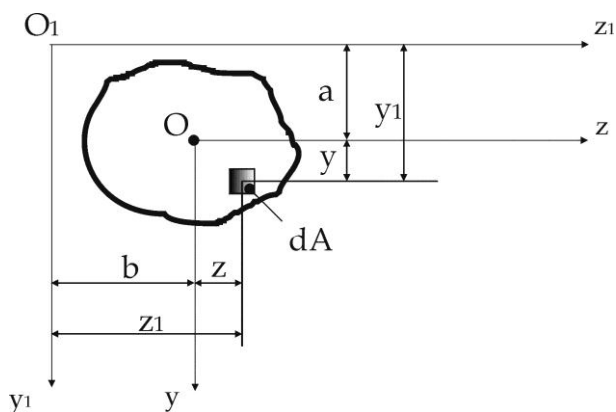


fig.5

Prin aplicarea relațiilor de definiție pentru momente de inerție, se obține:

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA,$$

$$I_{z_1} = I_z + 2a \cdot S_z + a^2 \cdot A;$$

$$I_{y_1} = I_y + 2b \cdot S_y + b^2 \cdot A;$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A (y+a)(z+b) dA = I_{yz} + a \cdot S_y + b \cdot S_z + ab \cdot A.$$

S_z și S_y reprezintă momentele statice ale figurii în raport cu axele Oz și Oy ; dacă aceste axe **sunt centrale**, momentele statice sunt nule, relațiile de mai sus rescriindu-se în forma:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 \cdot A,$$

$$I_{z_1} = I_z + a^2 \cdot A,$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + ab \cdot A;$$

prin sumarea primilor doi termeni de mai sus, se obține și:

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_{p_1} = I_p + (a^2 + b^2) \cdot A.$$

Momentele de inerție axiale sunt minime în raport cu centrul de greutate al secțiunii; cu cât axele de referință sunt mai depărtate de centrul de greutate cu atât momentele de inerție axiale cresc.

1.3.3 Variația momentelor de inerție la rotația axelor

Dacă se cunosc momentele de inerție I_z , I_y , I_{zy} ale unei figuri plane în raport cu un sistem ortogonal de axe yOz (vezi figura 6), din planul acesteia, se determină

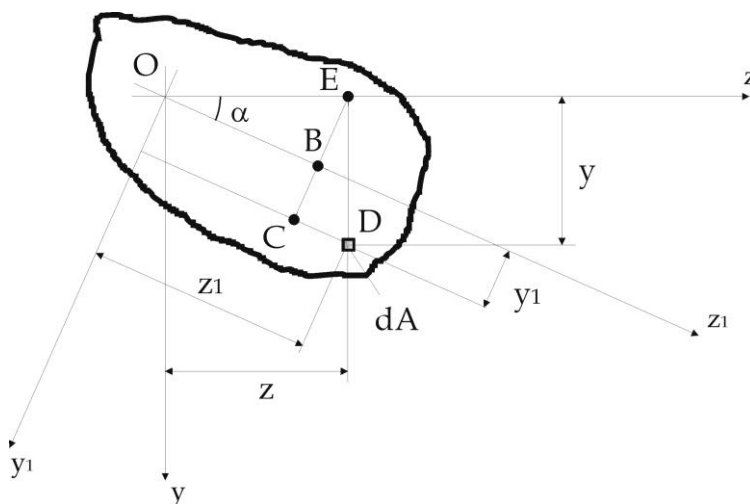


fig.6

momentele de inerție în raport cu un nou sistem de axe ortogonal y_1Oz_1 , rotit în raport cu primul cu un unghi α .

Pentru un element de arie dA , coordonatele față de cele două sisteme de referință sunt y și z (față de yOz), respectiv y_1 și z_1 (față de y_1Oz_1); relațiile între aceste coordonate sunt de forma:

$$y_1 = BC = CE - BE = y \cos \alpha - z \sin \alpha;$$

$$z_1 = CD + OB = y \sin \alpha + z \cos \alpha.$$

Prin aplicarea relațiilor de definiție, se ajunge la:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A yz dA = \\ &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (y \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 dA = \\ &= \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A yz dA = \\ &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Momentul de inerție centrifugal este:

$$\begin{aligned} I_{z_1y_1} &= \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)(y \sin \alpha + z \cos \alpha) dA = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \int_A y^2 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_A z^2 dA + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A yz dA, \end{aligned}$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha.$$

Se remarcă faptul că:

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z,$$

adică **suma momentelor de inerție axiale**, în raport cu două sisteme de axe ortogonale având aceeași origine, **este un invariant**.

Prin utilizarea relațiilor trigonometrice elementare, de forma:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

relațiile exprimate se rescriu:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + I_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - I_{zy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_z \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + I_y \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + I_{zy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{zy} \sin 2\alpha; \end{aligned}$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha.$$

1.3.4 Momente de inerție principale și direcții principale de inerție

Conform expresiilor momentelor de inerție studiate, rezultă că mărimea momentului de inerție în raport cu o axă oarecare depinde de unghiul de înclinare a acestei axe în raport cu un sistem de referință; va exista, astfel, o valoare a unghiului α pentru care valoarea momentului de inerție atinge un maxim. Pentru găsirea acestei limite se anulează prima derivată a expresiei momentului de inerție I_{z_1} din grupul de relații stabilit în cazul variației momentelor de inerție la rotația axelor; se obține:

$$\frac{dI_{z_1}}{d(2\alpha)} = 0; \quad -\frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha - I_{zy} \cos 2\alpha = -I_{z_1 y_1} = 0,$$

de unde:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}. \quad (\Delta)$$

În concluzie, momentele de inerție axiale sunt extreme pe direcțiile pe care momentele de inerție centrifugale sunt nule; aceste direcții sunt **direcții principale**, iar valorile momentelor de inerție respective sunt **momente de inerție principale**.

Relația (Δ) conduce la două valori pentru unghiul α : α' , $\alpha' + \frac{\pi}{2}$; există două direcții principale ortogonale, față de una din axe momentul de inerție fiind maxim iar față de cealaltă, minim (prin convenție). Se notează:

$$I_{\max} = I_1; \quad I_{\min} = I_2.$$

Pentru găsirea momentelor de inerție principale, se calculează din (Δ):

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{2I_{zy}}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{zy}^2}};$$

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{(I_y - I_z)}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{zy}^2}},$$

substituind în grupul de relații stabilit în cazul variației momentelor de inerție la rotația axelor, se obține:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \frac{I_y - I_z}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{zy}^2}} \mp I_{zy} \frac{2I_{zy}}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{zy}^2}},$$

cu simplificări, rezultând forma finală:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{zy}^2}.$$

Semnul pozitiv al unghiului α corespunde rotirii către semiaxa pozitivă a direcției Oy, în raport cu orizontala (axa Oz).

Pentru stabilirea axelor principale de inerție se calculează derivata a doua a expresiei lui I_{z_1} , notându-se cu α_1 unghiul făcut de direcția principală corespunzătoare momentului de inerție principal maxim (I_1), astfel:

$$\frac{d^2 I_{z_1}}{d(2\alpha)^2} = -\frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha_1 + I_{zy} \sin 2\alpha_1;$$

prin efectuarea calculelor, rezultă expresia finală a derivatei, în forma:

$$\frac{d^2 I_{z_1}}{d(2\alpha)^2} = \left[\left(\frac{I_z - I_y}{2} \right)^2 + I_{zy}^2 \right] \cdot 2 \cos^2 \alpha_1 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{I_{zy}}.$$

Semnul expresiei de mai sus depinde numai de raportul $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{I_{zy}}$; pentru un maxim trebuie îndeplinită condiția:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{I_{zy}} < 0,$$

așadar, pentru:

$$I_{zy} > 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 < 0 \Rightarrow \alpha_1 > \frac{\pi}{2};$$

$$I_{zy} < 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 > 0 \Rightarrow \alpha_1 < \frac{\pi}{2}.$$

1.3.5 Moment de inerție centrifugal maxim

Se consideră că axele principale de inerție ale suprafeței sunt axele Oy și Oz, astfel încât:

$$I_z = I_1; \quad I_y = I_2; \quad I_{zy} = 0,$$

relațiile găsite la rotirea sistemului de axe se rescriu în forma:

$$I_{z_1} = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (a)$$

$$I_{y_1} = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (b)$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (c)$$

Din relația (c) a grupului de mai sus rezultă că momentul de inerție centrifugal are valoarea maximă pentru:

$$\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ,$$

această valoare fiind dată de relația:

$$(I_{z_1 y_1})_{\max} = \frac{I_1 - I_2}{2}.$$

Prin urmare, **momentul de inerție centrifugal al unei suprafețe are valoarea maximă față de un sistem rectangular de axe, rotit cu 45° față de axele principale de inerție ale secțiunii.**

Bibliografie

- Andreescu I., Mocanu Șt.,- *Compendiu de Rezistența Materialelor* (curs), Ed. MatrixRom, București, 2005, ISBN 973-685-869-3, (Cap.1, p.48÷59).
- Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.,- *Rezistența Materialelor I* (curs), Universitatea Tehnică de Construcții București, 1995, (Cap.1, p.67÷75).
- Suport de curs de Rezistența Materialelor (ing.zi, ing.seral), format multimedia și site – Mocanu Șt., ediție de uz intern, Facultatea de Utilaj Tehnologic, 2006, (curs 3).

Test de autoevaluare 1.3

1. Aria unei suprafețe poate avea, în unele cazuri particulare, valori negative? (adevărat/fals).
2. Momentul static poate avea valori negative? (adevărat/fals).
3. Momentul de inerție centrifugal este nul în cazul secțiunilor ce nu admit axe de simetrie? (adevărat/fals).
4. Momentul de inerție centrifugal al unei suprafețe are valoarea maximă în raport cu un sistem rectangular de axe rotit la 45° față de axele principale de inerție ale secțiunii? (adevărat/fals).
5. Momentele de inerție au drept unitate de măsură, dimensional vorbind, $[L^4]$? (adevărat/fals).
6. În cazul secțiunilor ce admit cel puțin o axă de simetrie momentul de inerție este nul.

Sugestii privind rezolvarea testului de autoevaluare 1.3

1. Fals, vezi relațiile de definiție.
2. Adevărat, vezi relațiile de definiție.
3. Fals, vezi momente de inerție centrifugale.
4. Adevărat, vezi observația de la pag.8.
5. Adevărat, vezi definiții și relații de calcul.
6. (Momentul de inerție) centrifugal.

1.4 Tensiuni și deformații specifice

Scopul acestui capitol este de a defini și a enunța elementele ce implică clarificarea conceptelor privind tensiuni, tensorul tensiunilor, deformații specifice, tensorul deformațiilor precum și chestiuni legate de relațiile de echivalență între eforturi și tensiuni la bare drepte.

Paragraful 1.4.1 face referire la definirea tensiunilor (eforturilor unitare) la nivelul suprafeței secțiunii transversale a unui tronson dintr-un corp solicitat, implicit la tensorul tensiunilor pentru punctul considerat, paragraful 1.4.2 lămurind problema dualității tensiunilor tangențiale, iar 1.4.3 a relațiilor de echivalență între eforturi și tensiuni, la bare drepte.

Paragraful 1.4.4 tratează modul de definire al deformațiilor specifice, implicit la tensorul deformațiilor corespunzător.

Timpul alocat pentru studiul capitolului 1.4, inclusiv pentru parcurgerea testelor de auto-evaluare este în jur de 1,5 ore.

După parcurgerea capitolului 1.4, studentul va fi capabil :

- să determine mărimile diverselor tensiuni și deformații specifice / totale necesare rezolvării oricărei aplicații de Rezistența Materialelor;
- să identifice și să corecteze în timp util eventuale greșeli de calcul.

1.4.1 Tensiuni. Tensorul tensiunilor

Se consideră un corp supus acțiunii unui sistem oarecare de forțe aflat în echilibru (vezi figura 1).

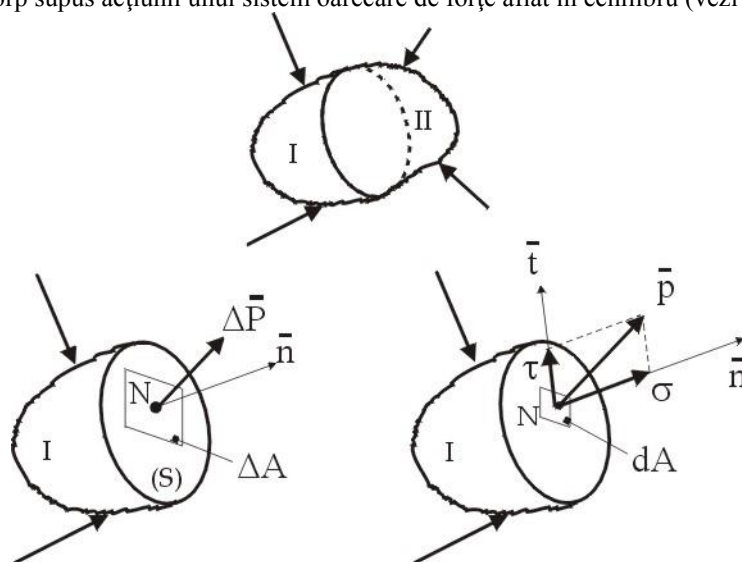


fig.1

După o prealabilă secționare în două a corpului, se îndepărtează una din părți (II); pe suprafața (S), în jurul punctului N, se alege un element de suprafață de arie ΔA , definit de versorul normalei la suprafață \bar{n} . Forța de legătură care trebuie introdusă ca efect a părții îndepărtate, forța corespunzătoare ariei ΔA , se notează cu $\Delta \bar{P}$; expresia:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta A} = \bar{p},$$

se numește **tensiune totală**, \bar{p} , în punctul N.

Tensiunea totală într-un punct este întotdeauna asociată cu versorul planului tangent la secțiunea dusă prin acel punct.

Prin descompunerea tensiunii totale \bar{p} după direcția normalei la suprafață \bar{n} și după direcția conținută în planul secțiunii, \bar{t} , se obțin componentele notate σ și τ , ce reprezintă tensiunea normală respectiv tensiunea tangențială în N, și care satisfac relația:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2,$$

sau

$$\bar{p} = \sigma \bar{n} + \tau \bar{t}.$$

Unitatea de măsură pentru tensiuni este $[FL^{-2}]$: N/mm² sau MPa.

Tensiunea tangențială se poate descompune după cele două direcții perpendiculare pe normala la secțiune și perpendiculare între ele (vezi figura 2):

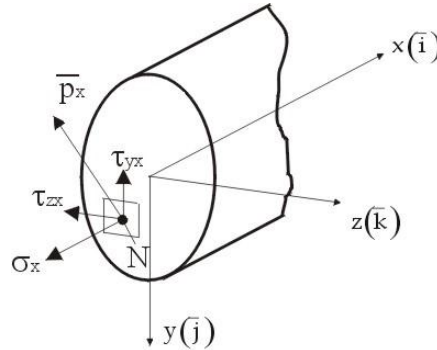


fig.2

Dacă aceste direcții sunt y și z (axele secțiunii), axa x fiind normală la secțiune, atunci componentele respective sunt τ_{yx} și τ_{zx} , astfel:

$$\bar{p}_x = \sigma_x \cdot \bar{i} + \tau_{yx} \cdot \bar{j} + \tau_{zx} \cdot \bar{k}.$$

Convenție de notare; pentru tensiunea normală σ se utilizează un singur indice, care se referă la normala la secțiune, pentru tensiunea tangențială τ se utilizează doi indici, primul, pentru axa cu care este paralelă tensiunea, al doilea pentru normala la secțiunea în care este conținută tensiunea.

Convenție de semne; σ este considerată pozitivă când trage de secțiune, iar tensiunile τ se consideră pozitive când sunt orientate în sens contrar sensului pozitiv al axelor după care acționează.

Printr-un punct oarecare P din interiorul unui corp se pot duce doar trei plane perpendiculare între ele (vezi figura 3); pe fiecare din aceste plane există o tensiune totală \bar{p} , cu trei componente, astfel, **starea de tensiune spațială într-un punct este definită de nouă componente.**

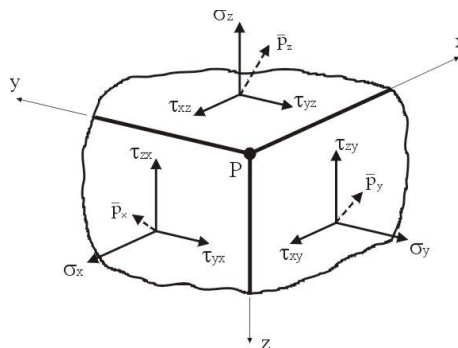


fig.3

Tabloul celor nouă componente, notat cu T_σ , se numește **tensorul tensiunilor** în punctul P, astfel:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Fiecare coloană a acestui tensor conține cele trei componente ale tensiunii totale corespunzătoare unuia din cele trei plane duse prin punctul considerat, componente definite de versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, astfel:

$$\begin{aligned} \bar{p}_x &= \sigma_x \cdot \bar{i} + \tau_{yx} \cdot \bar{j} + \tau_{zx} \cdot \bar{k}; \\ \bar{p}_y &= \tau_{xy} \cdot \bar{i} + \sigma_y \cdot \bar{j} + \tau_{zy} \cdot \bar{k}; \\ \bar{p}_z &= \tau_{xz} \cdot \bar{i} + \tau_{yz} \cdot \bar{j} + \sigma_z \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

1.4.2 Dualitatea tensiunilor tangențiale

Dintr-un corp solicitat se detașează un element de volum, considerat în jurul unui punct, având laturile dx , dy , dz (fig.4).

Pentru scrierea ecuațiilor de echilibru ar trebui figurate pe toate fețele elementului tensiunile existente; deoarece interesează doar ecuația de moment față de una din axe (Oy), pe element s-au figurat numai tensiunile care intervin în această ecuație, neglijându-se creșterile acestor tensiuni la trecerea de la o față la alta a elementului (aceste creșteri reprezintă, în ecuația de momente, variații de tipul infinit mic de ordin superior, prin urmare neglijabile).

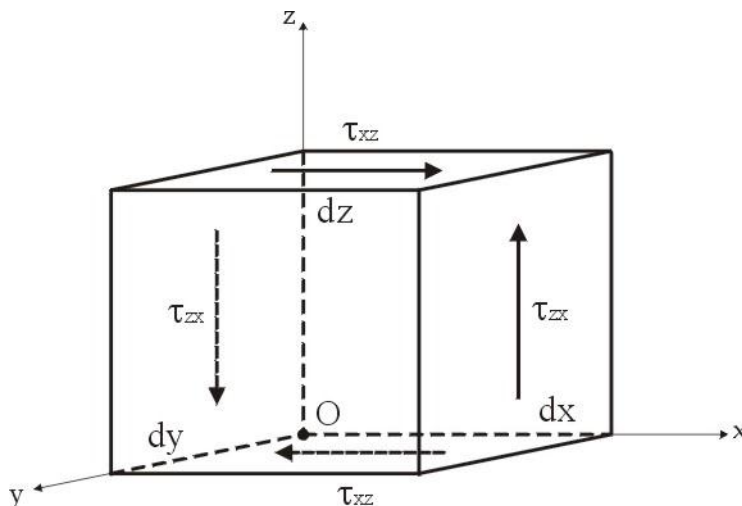


fig.4

Ecuația de momente în raport cu axa Oy va fi de forma:

$$(\tau_{xz} dx dy) dz - (\tau_{zx} dy dz) dx = 0, \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

În mod similar, prin scrierea ecuațiilor de momente în raport cu axele Ox și Oz (după ce în prealabil s-au reprezentat pe fețele elementului tensiunile ce intervin în aceste ecuații), se ajunge la:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz};$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}.$$

Relațiile de echivalență de mai sus reprezintă **legea dualității tensiunilor tangențiale**, care se enunță astfel:

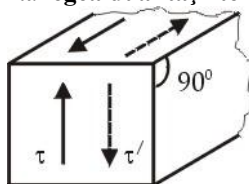


fig.5

“Pe două plane care fac între ele un unghi de 90° , componentele tensiunilor tangențiale de direcție perpendiculară pe linia de intersecție a celor două plane, sunt egale între ele ca mărime și au sensurile fie convergente, fie divergente în raport cu această linie.”

1.4.3 Relații de echivalență între eforturi și tensiuni

Se consideră partea din dreapta a unei bare secționată și se reprezintă (pe fața din dreapta a secțiunii), eforturile secționale și tensiunile (eforturile unitare) într-un punct (figura 6).

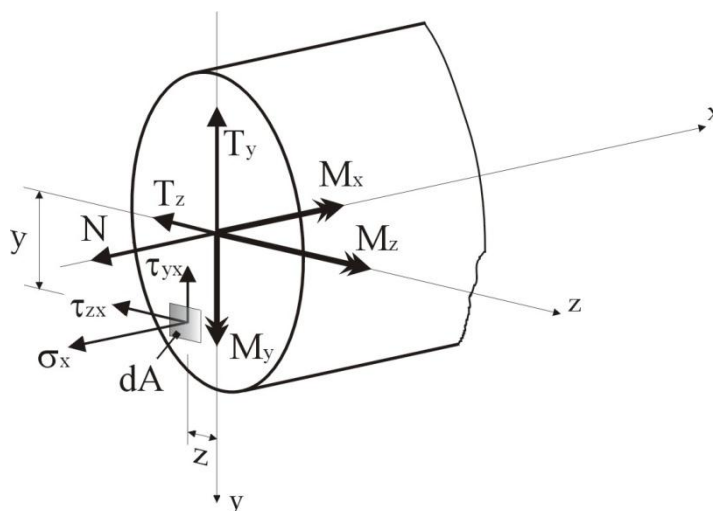


fig.6

Echivalența dintre eforturi și tensiuni se exprimă prin relațiile (ecuații de proiecții de forțe, respectiv sume de moment):

$$N = \int_A \sigma_x dA; \quad T_y = \int_A \tau_{yx} dA; \quad T_z = \int_A \tau_{zx} dA;$$

$$M_x = \int_A -(\tau_{yx} z + \tau_{zx} y) dA; \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA; \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA.$$

Tensiunile și eforturile secționale sunt **mărimi static echivalente**, constituind două moduri de reprezentare a forțelor interioare de la nivelul unei secțiuni transversale a barei.

1.4.4 Deformații specifice. Tensorul deformațiilor

Deformația specifică liniară

O bară având lungimea inițială l , în urma solicitărilor mecanice își modifică această dimensiune cu cantitatea $\Delta l = l_1 - l$, unde Δl reprezintă **deformația liniară totală**, putând fi vorba de *alungire* totală sau *scurtare* totală (vezi figura 7).

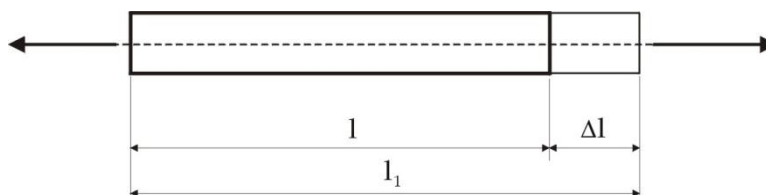


fig.7

Raportul:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l},$$

se numește **deformație specifică liniară** și reprezintă deformația unui tronson de bară de lungime egală cu unitatea; poate exista o *alungire specifică*, caz în care deformația se consideră pozitivă sau o *scurtare specifică*, în care caz deformația se consideră negativă.

Pentru un element de volum cu laturile dx , dy și dz (vezi figura 8), deformațiile liniare totale după cele trei direcții sunt $\Delta(dx)$, $\Delta(dy)$, $\Delta(dz)$, iar deformațiile specifice liniare:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz},$$

ε reprezentând o mărime adimensională.

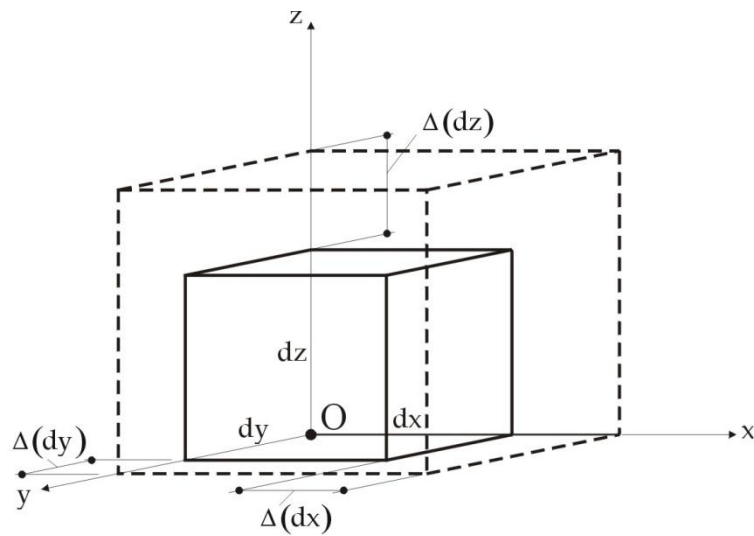


fig.8

Deformația specifică unghiulară

În urma deformației, unghiurile drepte ale unui corp se modifică (vezi figura 9), cu cantitatea:

$$\gamma = \arctg \frac{bb_1}{ab} \cong \frac{bb_1}{ab},$$

în care γ reprezintă **deformația specifică unghiulară** sau **lunecarea specifică**, mărime ce indică cu cât s-a modificat unghiul drept în urma deformării:

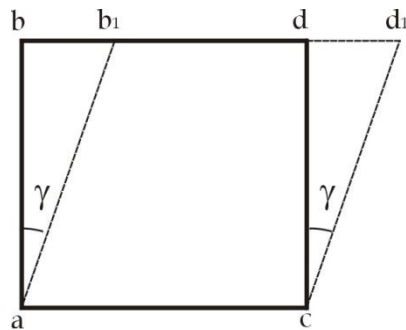


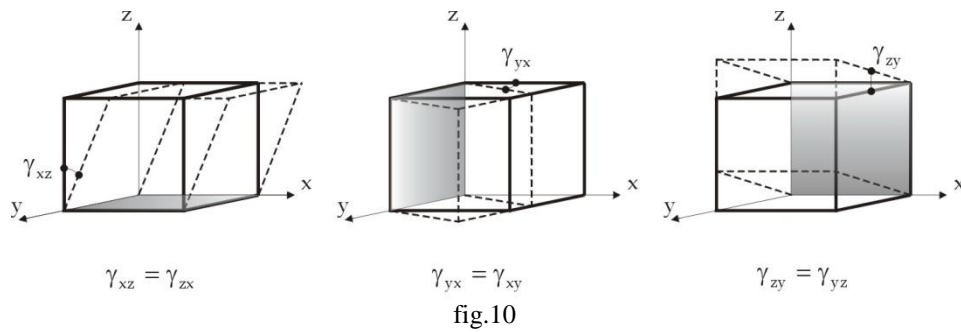
fig.9

Convențional, deformația specifică unghiulară se consideră pozitivă când unghiul drept se micșorează, respectiv negativă, când unghiul drept se mărește.

Pentru un element de volum de laturi dx , dy și dz , componentele deformației specifice unghiulare se reprezintă conform figurii alăturată.

Tabloul (matricea) componentelor deformației specifice, notat cu T_ϵ , pentru un element de volum considerat în vecinătatea unui punct, se numește **tensorul deformațiilor**, fiind exprimat prin analogie cu tensorul tensiunilor, astfel:

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}.$$



Bibliografie

- Andreescu I., Mocanu Șt.,- *Compendiu de Rezistența Materialelor* (curs), Ed. MatrixRom, București, 2005, ISBN 973-685-869-3, (Cap.1, p.64÷69).
- Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.,- *Rezistența Materialelor I* (curs), Universitatea Tehnică de Construcții București, 1995, (Cap.1, p.85÷89).
- Suport de curs de Rezistența Materialelor (ing.zi, ing.seral), format multimedia și site – Mocanu Șt., ediție de uz intern, Facultatea de Utilaj Tehnologic, 2006, (curs 4).

Test de autoevaluare 1.4

7. Efortul unitar este totuna cu efortul secțional? (adevărat/fals).
8. Tensiunea tangențială are uneori direcția cuprinsă în suprafața pe care se dezvoltă? (adevărat/fals).
9. Efortul unitar normal are direcția la suprafața pe care se dezvoltă.
10. Scurtarea totală a unui tronson reprezintă o deformare specifică? (adevărat/fals).
11. Tensorul tensiunilor reprezintă un tablou (matrice) a componentelor deformației specifice? (adevărat/fals).
12. Tabloul (matricea) componentelor deformației specifice poartă denumirea de

Sugestii privind rezolvarea testului de autoevaluare 1.4

1. Fals, vezi definiții.
2. Fals, formulare ambiguă.
3. Normală.
4. Fals, vezi definiție.
5. Fals, vezi definiție și enunț întrebare.
6. Tensorul deformațiilor.