2.3 Solicitarea de încovoiere simplă I

Scopul actualei prelergeri este de a demonstra şi stabili modalitățile generice de abordare în ceea ce priveşte tratarea problemelor din Rezistența Materialelor din punctul de vedere al solicitării de încovoiere simplă a barelor drepte.

Paragraful 2.3.1 tratează modul elementar de definire al solicitării precum şi al principalelor subclase ale acesteia, punându-se în evidență deosebirile dintre acestea.

Paragraful 2.3.2 demonstrează modul de variație al legii de distribuție pe secțiune a tensiunii normale σ, precum şi modul în care se utilizează formula lui Navier la calculul efectiv.

Timpul alocat pentru studiul paragrafelor 2.3.1 şi 2.3.2, inclusiv parcurgerea testelor de auto-evluare este de circa 2 ore.

După parcurgerea paragrafelor 2.3.1 şi 2.3.2 ale capitolului 2.3, cursantul va fi capabil:
- să identifice corect tipul de solicitare din care face parte corpul studiat;
- să efectueze operații specifice - dimensionare, verificare sau stabilire de efort corespunzătoare tipului de solicitare studiat;
- să identifice şi să corecteze în timp util eventualele greşeli de calcul sau raționament tehnic.

2.3.1 Generalități

Acest tip de solicitare apare ca rezultat al acțiunii cuplurilor şi forțelor exterioare care produc eforturi secționale de tip moment încovoietor; datorită acestora, axa longitudinală a barei îşi modifică forma (curbura). Barele încovoiate poartă denumirea generică de grinzi.

Se poate vorbi despre **încovoiere pură**, în situația în care momentul încovoietor de la nivelul secțiunii nu este însoțit şi de prezența forțelor tăietoare (forțele tăietoare lipsesc din secțiune).

Se poate vorbi despre **încovoiere simplă**, în situația în care eforturile din secțiune se reduc la un vector moment încovoietor a cărui direcție <u>coincide</u> cu vreuna din axele centrale şi principale ale secțiunii, cu forța tăietoare corespunzătoare ($T_y \rightarrow M_z, T_z \rightarrow M_y$).

2.3.2 Încovoviere pură. Formula lui Navier

Se consideră o secțiune transversală a unei grinzi drepte, axele Oy şi Oz fiind axe centrale (trec prin centrul de greutate) şi principale (vezi figura 1).

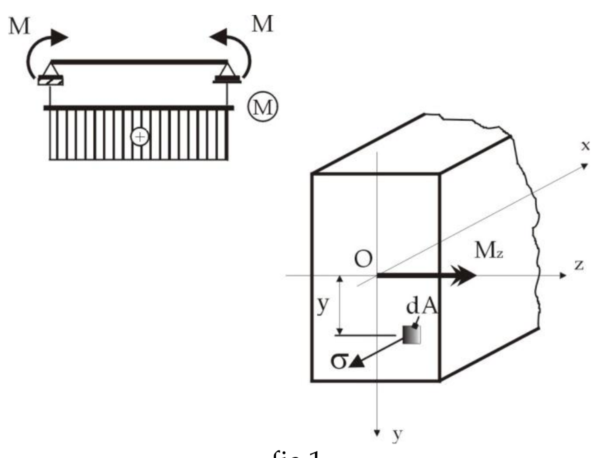

fig.1

În acest caz, pe suprafața secțiunii transversale a grinzii apar tensiuni normale σ; pentru stabilirea legii de distribuție a tensiunilor σ pe secțiune, se utilizează studiile (aspectele) geometric, fizic şi static.

Studiul geometric

Pe o porțiune de grindă de secțiune dreptunghiulară se trasează o rețea de linii longitudinale şi contururi succesive ale secțiunilor transversale (fig.2). Prin acționarea barei cu cupluri de forțe la extremități, se realizează încovoierea pură a barei; se constată deformarea grinzii, axa longitudinală a acesteia transformându-se într-o curbă denumită (axa) deformată a barei.

Simultan cu axa se deformează şi liniile (reperele) longitudinale, distanța între acestea rămânând, însă, constantă, astfel că tensiunile normale σ, între fibrele longitudinale, sunt nule. Sub acțiunea momentului încovoietor pozitiv, fibrele de la partea superioară se scurtează, iar cele de la partea inferioară se lungesc (vezi figura).

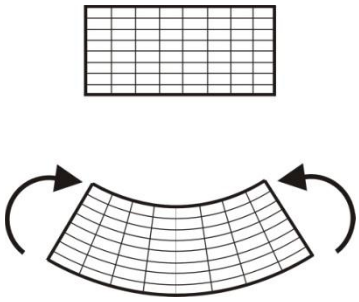

fig.2

Trecerea de la fibrele alungite la cele scurtate se face continuu, existând o fâşie intermediară de fibre care se încovoaie, **dar nu îşi modifică lungimea** (avem de-a face cu o fâşie neutră). Intersecția fâşiei neutre cu planul unei secțiuni transversale defineşte *axa neutră a secțiunii*.

Liniile drepte ale contururilor dreptunghiulare normale la axa nedeformată a barei rămân, după deformare, în plane normale la axa deformată; prin extrapolare pentru interiorul grinzii, se admite ipoteza lui Bernoulli (secțiuni plane şi normale la axa barei rămân plane şi normale la aceasta şi după deformare).

Se observă că planele în discuție sunt normale la toate liniile longitudinale, prin urmare tensiunile tangențiale τ din secțiunile transversale sunt nule. De aici
se deduce faptul că şi forțele tăietoare precum şi momentele de torsiune sunt nule la nivelul secțiunilor normale, confirmându-se astfel încovoierea pură a structurii.

Secțiunea transversală îşi modifică forma datorită contracției transversale, modificarea fiind, însă, neglijabilă; este suficient de exact a considera că axa neutră este o dreaptă, în cazul barelor cu plan de simetrie (axa neutră fiind perpendiculară pe acest plan).

Se admite că deformarea prin încovoiere a barei se produce astfel încât secțiunile transversale plane se înclină una față de alta, rotindu-se în jurul axelor neutre proprii (vezi figura 3).

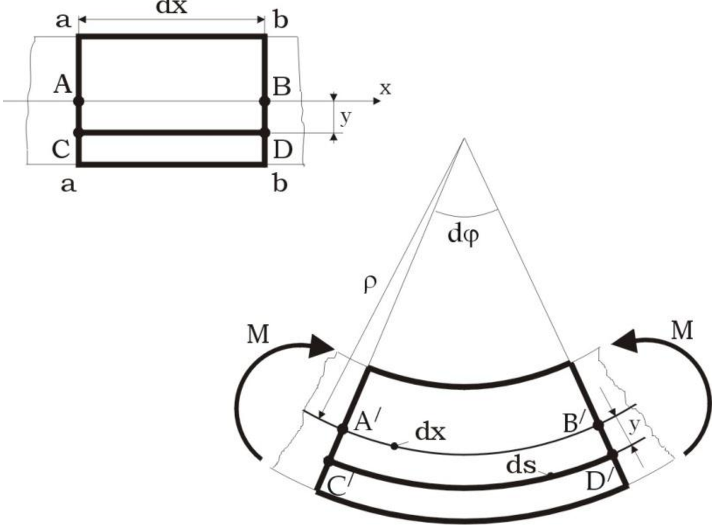

fig.3

Astfel, cele două secţiuni a-a şi b-b, ce delimitează un element de lungime dx considerat pe faţa laterală a unei grinzi de secţiune omogenă, în urma solicitării formează între ele un unghi elementar $d\varphi$; în urma deformării fâşia neutră AB se curbează, raza de curbură, considerată a fi constantă pe lungimea dx, fiind notată cu ρ.

Deoarece lungimea fâşiei AB rămâne constantă (AB – fâşie neutră), se poate scrie:

$$AB = A^{/}B^{/},$$

$$dx = \rho \cdot d\varphi.$$

O fâşie curentă CD, de lungime dx înainte de deformare şi situată la distanţa (cota) y în raport cu axa neutră, va avea lungimea totală după deformare:

$$C^{/}D^{/} = (\rho + y)d\varphi = dx + y\,d\varphi;$$

în concluzie, alungirea totală a fâşiei CD este:

$$C^{/}D^{/} - CD = y\,d\varphi,$$

iar alungirea specifică liniară:

$$\varepsilon = \frac{C^{/}D^{/} - CD}{CD} = \frac{y}{\rho}.$$

Studiul fizic

Se admite că solicitarea are loc în domeniul liniar elastic al materialului, în plus fibrele longitudinale ale grinzii neinfluenţându-se reciproc, se poate utiliza legea lui Hooke, ajungându-se la:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}.$$

Raza de curbură fiind constantă pentru elementul din grindă considerat, rezultă că deformaţiile specifice liniare şi tensinile normale variază **liniar** cu coordonata (cota) măsurată normal la axa neutră, fiind, în plus, constante pe linii paralele cu această axă (vezi figura 4).

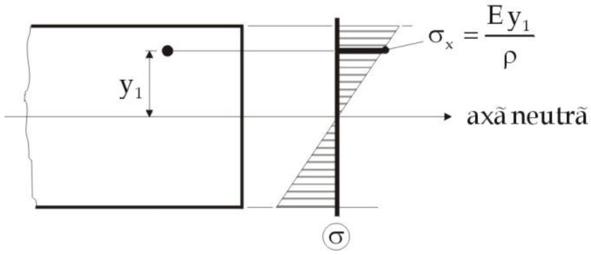

fig.4

Studiul static

În secţiunea transversală starea de eforturi este:

$$M_z \neq 0, \quad N = 0, \quad M_y = 0;$$

prin utilizarea relaţiilor de echivalenţă între eforturi şi tensiuni se ajunge la:

$$M_z = \int_A \sigma_x\, y\, dA, \quad N = \int_A \sigma_x\, dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x\, z\, dA.$$

Prin înlocuirea în relaţiile de echivalenţă a valorilor particulare din cazul studiat, se obţine:

$$N = \int_A \sigma_x\, dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y\, dA = 0 \Rightarrow \int_A y\, dA = 0;$$

$$\text{dar} \int_A y\, dA = S_z,$$

momentele statice fiind nule faţă de axele ce trec prin centrul de greutate, în concluzie, axa neutră a unei secţiuni trece prin centrul ei de greutate.

Prin prelucrarea expresiei momentului M_y, se obţine:

$$M_y = \int_A \sigma_x\, z\, dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A yz\, dA = 0 \Rightarrow \int_A yz\, dA = 0,$$

$$\text{unde} \int_A yz\, dA = I_{yz},$$

în care I_{yz} este momentul de inerție centrifugal în raport cu axele y şi z. Astfel, axele y şi z sunt axe principale de inerție; axa neutră este axa z pe care se suprapune vectorul moment încovoietor, în plus, aceasta suprapunându-se cu *fibra medie deformată* a secțiunii.

Prin explicitarea relației de echivalență pentru M_z, se ajunge la:

$$\left.\begin{aligned} & M_z = \int_A \sigma_x\, y\, dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2\, dA; \\ & \int_A y^2\, dA = I_z; \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_z = \frac{EI_z}{\rho},$$

sau

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z},$$

în care EI_z este rigiditatea la încovoiere a (secțiunii) grinzii.

Prin folosirea expresiei furnizate de studiul fizic, se ajunge la relația:

$$\sigma_x = E\frac{y}{\rho} = \frac{M_z}{I_z}y,$$

sau **formula lui Navier**; această din urmă relație arată că tensiunile sunt direct proporționale cu mărimea momentului încovoietor, cu ordonata (cota) y măsurată de la axa neutră şi invers proporționale cu momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa neutră a secțiunii. Tensiunile σ au semnul în concordanță cu efectul fizic pe care îl are momentul încovoietor asupra secțiunii (vezi figura 5).

În discuția ce urmează se porneşte de la expresia:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{I_z}y_{max},$$

prin introducerea notației $W_z \overset{not.}{=} \dfrac{I_z}{y_{max}}$, unde W_z – modul de rezistență axial al secțiunii, în raport cu axa z, expresia inițială se poate rescrie:

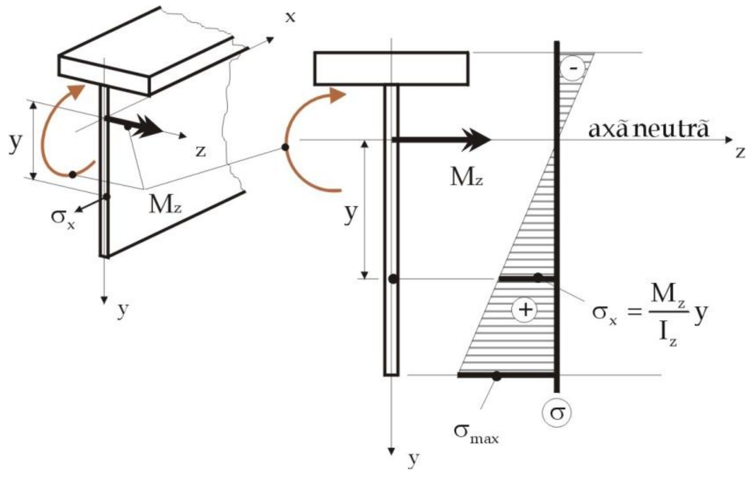

fig.5

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z}.$$

În cazul în care momentul încovoietor M_z este variabil, tensiunile normale maxime σ_{max} apar în secțiunea cu moment încovoietor maxim de pe grindă, în fibrele cele mai depărtate ale secțiunii, în raport cu axa neutră a acesteia (fig.5).

Dacă se admite aceeaşi valoare a tensiunii normale maxim admisibile atât la întindere cât şi la compresiune, condiția de rezistență la încovoiere (relație tip verificare), este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z_{max}}}{W_z} \le \sigma_a.$$

Bibliografie

- Andreescu I., Mocanu Şt.,- *Compendiu de Rezistența Materialelor* (curs), Ed. MatrixRom, Bucureşti, 2005, ISBN 973-685-869-3, (Cap.1, p.110÷118).
- Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.,- *Rezistența Materialelor I* (curs), Universitatea Tehnică de Construcții București, 1995, (Cap.1, p.163÷168).
- Suport de curs de Rezistența Materialelor (ing.zi, ing.seral), format multimedia şi site – Mocanu Şt., ediție de uz intern, Facultatea de Utilaj Tehnologic, 2006, (curs 7).

Test de autoevaluare 2.3.1÷2.3.2

1. O consolă încărcată cu un moment încovoietor concentrat este solicitată la încovoiere pură (adevărat/fals).
2. La determinarea formulei lui Navier nu s-a considerat valabilă ipoteza lui Bernoulli (adevărat/fals).
3. Axa neutră a secțiunii reprezintă intersecția fâşiei neutre cu planul secțiunii transversale în discuție (adevărat/fals).
4. Distribuția tensiunilor normale în cazul solicitării de încovoiere este liniară, având valoare nulă la nivelul axei neutre a secțiunii (adevărat/fals).
5. Dimensionarea în cazul solicitării de încovoiere simplă implică determinarea ariei secțiunii transversale a tronsonului în discuție (adevărat/fals).
6. Diagrama de efort unitar normal datorat solicitării de încovoiere are modul de variație ....

Sugestii privind rezolvarea testului de auto-evaluare 2.3.1÷2.3.2

1. Adevărat.
2. Fals, vezi ipoteze de lucru.
3. Adevărat.
4. Adevărat.
5. Fals.
6. Liniar, vezi formula lui Navier – demonstrație.