

## 2.3 Solicitarea de încovoiere simplă IV

Scopul actualei prelegeri este de a demonstra și stabili modalitățile generice de abordare în ceea ce privește tratarea problemelor din Rezistența Materialelor din punctul de vedere al solicitării de încovoiere simplă a barelor drepte.

Paragraful 2.3.5 tratează modul de abordare al problemelor calculului deformațiilor la bare drepte supuse la solicitarea de încovoiere simplă.

Timpul alocat pentru studiul în totalitate al paragrafului 2.3.5, inclusiv parcurgerea testelor de auto-evaluare de la finele cursului 12 este de circa 3,5 ore.

După parcurgerea paragrafului 2.3.5 al capitolului 2.3, cursantul va fi capabil:

- să identifice corect tipul de solicitare din care face parte corpul studiat;
- să efectueze operații specifice de evaluare calitativă și cantitativă a deformațiilor corespunzătoare tipului de solicitare studiat, precum și de dimensionare-verificare din condiția de rigiditate;
- să identifice și să corecteze în timp util eventualele greșeli de calcul sau raționament tehnic.

### 2.3.5 Calculul deformațiilor la bare drepte solicitate la încovoiere

#### 2.3.5.1 Generalități

În urma solicitării la încovoiere, barele (grinzile) drepte iau forme curbe, axa longitudinală a barei fiind de forma unei curbe continue, denumită **fibră medie deformată**. Studiul deformațiilor urmărește stabilirea formei deformată a grinzii sau determinarea **săgeților** și **rotirilor** produse în dreptul secțiunilor acesteia.

Starea deformată se caracterizează prin deplasarea pe verticală, numită **săgeată** (notată cu  $v$ ) și înclinarea fibrei medii sau a secțiunii transversale (în raport cu forma nedeformată a structurii), numită **rotire** și notată cu  $\varphi$  (vezi figura 1).

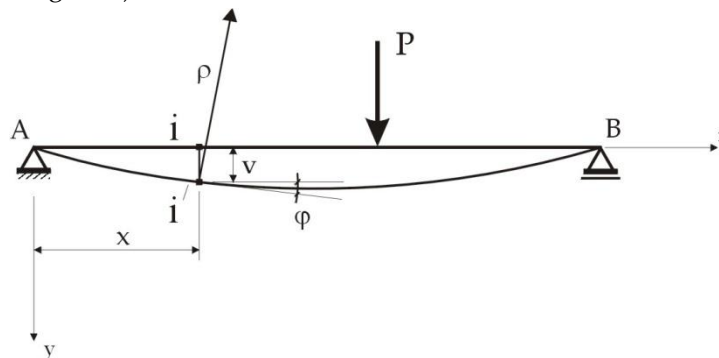


fig.1

Rotirea  $\varphi$  este considerată pozitivă când axa  $x$  se suprapune peste tangenta în punct la secțiune, prin rotire în sens orar; în ipoteza deplasărilor mici  $\varphi = \frac{dv}{dx}$ .

Săgeata  $v$  reprezintă o cantitate mică în raport cu lungimea barei iar deplasarea pe orizontală corespunzătoare aceluiași punct  $i$  reprezintă un infinit mic de ordin superior în raport cu  $v$ ; se consideră că punctul  $i$  se deplasează pe verticală în  $i/$ .

### 2.3.5.2 Stabilirea ecuației fibrei medii deformate

La studiul tensiunilor datorate solicitării de încovoiere (formula lui Navier), a fost stabilită relația între curbura barei și momentul încovoiator, astfel:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z};$$

se va renunța la indicele  $z$  pentru deplasări în planul  $xy$ .

Raza de curbură  $\rho$  (curbura) fibrei medii deformate se poate exprima ca în geometria diferențială, astfel:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

dar  $\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \cong \varphi$  se neglijează, având valori foarte mici în raport cu unitatea; astfel, rezultă:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

Datorită faptului că atunci când  $M_z$  este pozitiv,  $\frac{1}{\rho}$  este de semn negativ și invers (vezi figura 2), ecuația fibrei medii deformate se va scrie în forma:

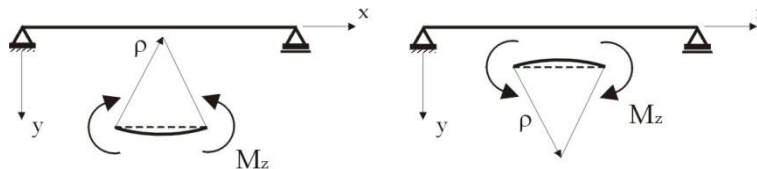


fig.2

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI},$$

expresia de mai sus reprezentând forma simplificată a ecuației fibrei medii deformate (de ordinul II). În cazul unor tronsoane de bară de rigiditate constantă și utilizând relațiile diferențiale dintre eforturi și încărcări la bare drepte:

$$EI = \text{ct.};$$

$$\frac{dM}{dx} = T; \quad \frac{dT}{dx} = -q,$$

se poate exprima ecuația diferențială de ordin IV a fibrei medii deformate, în forma:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q}{EI}.$$

### 2.3.5.3 Metoda integrării directe a ecuației fibrei medii deformate

Se consideră cazul unei bare de secțiune constantă și se presupune a fi cunoscută legea de variație a momentului încovoiator,  $M = M(x)$ . Prin integrări succesive ale ecuației aproximative a fibrei medii deformate se obține rotirea  $\varphi = \varphi(x)$  și săgeata  $v = v(x)$ , astfel:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{EI} \int M(x) dx + C_1;$$

$$v(x) = \int \varphi(x) dx = -\frac{1}{EI} \int \left( \int M(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

Pentru determinarea constantelor de integrare  $C_1$  și  $C_2$  se pun **condiții la limită** care reprezintă valori ale săgeților și rotirilor în punctele de rezemare și/sau în alte secțiuni caracteristice ale grinzii (vezi tabelul 1).

Tipul de reazem	Condiții în deplasări	Condiții în eforturi
reazem simplu	$v = 0; \varphi \neq 0$	$M = 0; T \neq 0$
încastrare	$v = 0; \varphi = 0$	$M \neq 0; T \neq 0$
capăt liber	$v \neq 0; \varphi \neq 0$	$M = 0; T = 0$
reazem simplu intermediar	$v_{st} = v_{dr} = 0;$ $\varphi_{st} = \varphi_{dr} \neq 0$	$M_{st} = M_{dr} \neq 0;$ $T_{st} \neq T_{dr} \neq 0$
articulație intermediară	$v_{st} = v_{dr} \neq 0;$ $\varphi_{st} \neq \varphi_{dr} \neq 0$	$M_{st} = M_{dr} = 0;$ $T_{st} = T_{dr} \neq 0$

tabelul 1

*Exemple*

Aplicația 1

**Bară încadrată la un capăt, încărcată cu o forță concentrată la capătul liber (fig.3)**

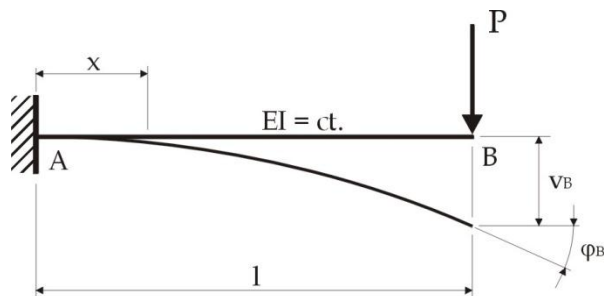


fig.3

Într-o secțiune oarecare situată la distanța  $x$  în raport cu originea considerată în punctul A, expresia momentului încovoietor curent este:

$$M(x) = -P(1-x),$$

prin urmare, ecuația aproximativă a fibrei medii deformate este de forma:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P(1-x)}{EI};$$

prin integrare succesivă de două ori se obțin expresiile săgeții și rotirii, astfel:

$$\frac{dv}{dx} = \varphi = \frac{P}{EI} \left( lx - \frac{x^2}{2} + C_1 \right),$$

$$v = \frac{P}{EI} \left( l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right).$$

Condițiile la limită pentru acest caz sunt :

$$x = 0 \Rightarrow v = 0; \varphi = 0 \text{ (reazemul A - încastrare),}$$

de unde rezultă  $C_1 = C_2 = 0$ .

În capătul liber B, săgeata și rotirea au valori maxime, prin înlocuire obținându-se:

$$v_B^{x=l} = v_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI};$$

$$\varphi_B^{x=l} = \varphi_{\max} = \frac{Pl^2}{2EI}.$$

#### Aplicația 2

**Bară încastrată la un capăt, încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată deschiderea (fig.4)**

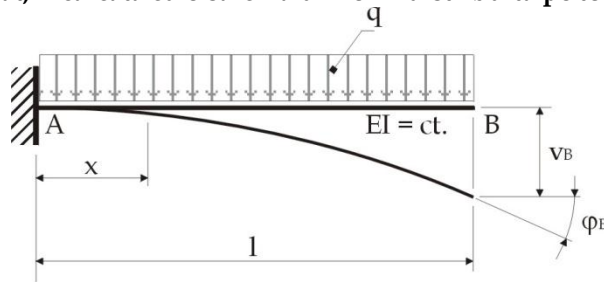


fig.4

Într-o secțiune oarecare situată la distanța x în raport cu originea A, momentul încovoietor are expresia:

$$M = -q \frac{(1-x)^2}{2};$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q}{2EI} (l^2 - 2lx + x^2),$$

integrând succesiv, rezultă expresiile:

$$\frac{dv}{dx} = \varphi = \frac{q}{2EI} \left( l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} + C_1 \right);$$

$$v = \frac{q}{2EI} \left( l^2 \frac{x^2}{2} - l \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 \right).$$

Condițiile la limită sunt:

$$x = 0 \Rightarrow v = 0; \varphi = 0,$$

prin urmare  $C_1 = C_2 = 0$ .

Rotirea și săgeata sunt maxime la extremitatea liberă a consolei:

$$v_B^{x=1} = v_{\max} = \frac{ql^4}{8EI};$$

$$\varphi_B^{x=1} = \varphi_{\max} = \frac{ql^3}{6EI}.$$

Aplicația 3

Bară simplu rezemată la capete, încărcată la mijloc cu o forță concentrată (fig.5)

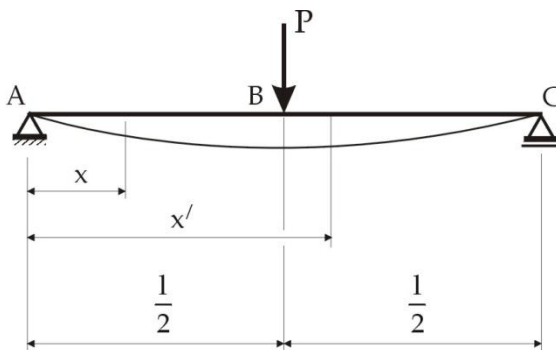


fig.5

Pe intervalul AB expresia momentului încovoietor este:

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x; \quad x \in \left[0, \frac{l}{2}\right],$$

iar pe intervalul BC expresia devine:

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x - P \left(x - \frac{l}{2}\right) = -\frac{P}{2}(x - l); \quad x \in \left[\frac{l}{2}, l\right].$$

Rezultă:

- pe intervalul AB:  $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{P}{2EI} \cdot x, \quad \left(x \in \left[0, \frac{l}{2}\right]\right);$
- pe intervalul BC:  $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{P}{2EI}(1-x), \quad \left(x \in \left[\frac{l}{2}, l\right]\right).$

Se integrează de două ori pe ambele intervale și se obține:

(A ÷ B)	(B ÷ C)
$\frac{dv}{dx} = \varphi = -\frac{P}{2EI} \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right);$	$\frac{dv}{dx} = \varphi = -\frac{P}{2EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} + C_3\right);$
$v = -\frac{P}{2EI} \left(\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2\right),$	$v = -\frac{P}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_3x + C_4\right).$

Condițiile la limită sunt:

$$x = 0 \Rightarrow v_A = 0;$$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow v_B^{st} = v_B^{dr}; \quad \varphi_B = 0;$$

$$x = l \Rightarrow v_C = 0.$$

Prin înlocuire în ecuațiile de mai sus, se obțin constantele:

$$C_1 = -\frac{l^2}{8}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = -\frac{3l^2}{8}; \quad C_4 = \frac{l^3}{24}.$$

Săgeata maximă are loc la mijlocul grinzii :

$$v_B^{x=\frac{l}{2}} = v_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI},$$

iar rotirile maxime au loc la nivelul reazemelor:

$$\varphi_A = -\varphi_C = \frac{Pl^2}{16EI}.$$

#### Aplicația 4

**Bară simplu rezemată la capete, încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată deschiderea**  
(fig.6)

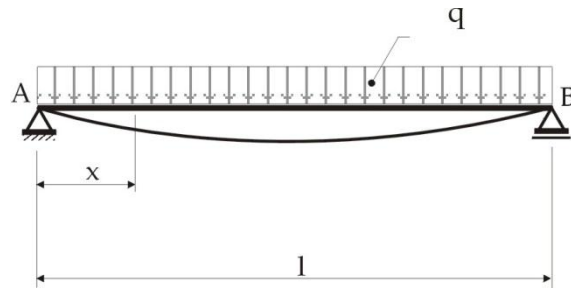


fig.6

Expresia momentului încovoiitor într-o secțiune curentă (situată la distanța x în raport cu originea A), este:

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2},$$

prin urmare, rezultă:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q}{2EI}(-lx + x^2);$$

prin integrare succesivă, se obține:

$$\frac{dv}{dx} = \varphi = \frac{q}{2EI} \left( -\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_1 \right);$$

$$v = \frac{q}{2EI} \left( -\frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2 \right).$$

Se exprimă condițiile la limită:

$$x = 0 \Rightarrow v = 0;$$

$$x = l \Rightarrow v = 0,$$

astfel, rezultă constantele de integrare:

$$C_2 = 0; C_1 = \frac{l^3}{12}.$$

Expresia săgeților se poate rescrie în forma:

$$v = \frac{q}{EI} \left( -\frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{l^3x}{12} \right);$$

săgeata maximă apare la jumătatea deschiderii grinzii:

$$v_{\max}^{x=\frac{l}{2}} = \frac{5ql^4}{384EI},$$

iar rotirile au valori maxime pe reazeme:

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{ql^3}{24EI}.$$

## 2.3 Solicitarea de încovoiere simplă V

Scopul actualei prelegeri este de a demonstra și stabili modalitățile generice de abordare în ceea ce privește tratarea problemelor din Rezistența Materialelor din punctul de vedere al solicitării de încovoiere simplă a barelor drepte.

Subparagraful 2.3.5.4 tratează o variantă de sistematizare a metodei de integrare directă a ecuației fibrei medii deformate, metoda parametrilor în origine.

Timpu alocat pentru studiul în totalitate al paragrafului 2.3.5, inclusiv parcurgerea testelor de auto-evaluare de la finele cursului 12 este de circa 3,5 ore.

După parcurgerea paragrafului 2.3.5 al capitolului 2.3, cursantul va fi capabil:

- să identifice corect tipul de solicitare din care face parte corpul studiat;
- să efectueze operații specifice de evaluare calitativă și cantitativă a deformațiilor corespunzătoare tipului de solicitare studiat, precum și de dimensionare-verificare din condiția de rigiditate;
- să identifice și să corecteze în timp util eventualele greșeli de calcul sau raționament tehnic.

### 2.3.5.4 Metoda parametrilor în origine

În cazul barelor cu mai multe încărcări, numărul intervalelor pe care s-ar face integrarea ecuației diferențiale a fibrei medii deformate este mai mare, metoda precedentă devenind mult prea laborioasă.

Metoda parametrilor în origine reprezintă o metodă de integrare sistematizată; indiferent de numărul intervalelor, **vor exista doar două constante de integrare de aflat.**

Se consideră o bară dreaptă (vezi figura 1), la care nu se fac precizări privind schema de rezemare a acesteia, bară supusă unor diverse tipuri de încărcări:

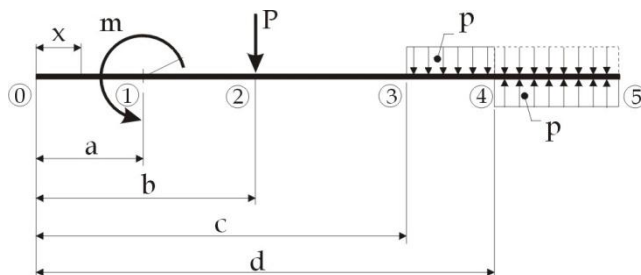


fig.1

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate se exprimă în forma generică:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \text{ sau}$$
$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -M.$$

Pentru o secțiune curentă situată la distanța  $x$  în raport cu originea 0, secțiune ce "va parcurge" fiecare din intervalele barei, se scrie expresia momentului încovoiător; pentru ca în această expresie să rămână perfect valabili termenii momentului încovoiător exprimați pentru intervalele precedente, **sarcina**

**distribuită** se consideră aplicată până la extremitatea din dreapta a barei (5), în plus, pentru a nu modifica schema de încărcare inițială, se aplică o sarcină distribuită egală și de sens contrar pe zona 4-5. Se obțin, astfel:

$$\begin{aligned}M_{01} &= 0; \\M_{12} &= -m(x-a)^0; \\M_{23} &= -m(x-a)^0 - P(x-b); \\M_{34} &= -m(x-a)^0 - P(x-b) - \frac{p(x-c)^2}{2}; \\M_{45} &= -m(x-a)^0 - P(x-b) - \frac{p(x-c)^2}{2} + \frac{p(x-d)^2}{2}.\end{aligned}$$

Utilizându-se ecuația diferențială a fibrei medii deformată și înlocuind pentru expresiile celor cinci intervale succesive ale barei, se obțin relațiile:

$$\begin{aligned}EI \frac{d^2v}{dx^2}{}_{01} &= 0; \\EI \frac{d^2v}{dx^2}{}_{12} &= m(x-a)^0; \\EI \frac{d^2v}{dx^2}{}_{23} &= m(x-a)^0 + P(x-b); \\EI \frac{d^2v}{dx^2}{}_{34} &= m(x-a)^0 + P(x-b) + \frac{p(x-c)^2}{2}; \\EI \frac{d^2v}{dx^2}{}_{45} &= m(x-a)^0 + P(x-b) + \frac{p(x-c)^2}{2} - \frac{p(x-d)^2}{2}.\end{aligned}$$

Prin integrarea succesivă a ecuațiilor de mai sus, se obțin expresiile rotirii și săgeții pentru fiecare interval considerat, astfel, pentru rotiri:

$$\begin{aligned}EI \frac{dv}{dx}{}_{01} &= C_1; \\EI \frac{dv}{dx}{}_{12} &= C_2 + m(x-a); \\EI \frac{dv}{dx}{}_{23} &= C_3 + m(x-a) + \frac{P(x-b)^2}{2}; \\EI \frac{dv}{dx}{}_{34} &= C_4 + m(x-a) + \frac{P(x-b)^2}{2} + \frac{p(x-c)^3}{6}; \\EI \frac{dv}{dx}{}_{45} &= C_5 + m(x-a) + \frac{P(x-b)^2}{2} + \frac{p(x-c)^3}{6} - \frac{p(x-d)^3}{6};\end{aligned}$$

respectiv, pentru săgeți:

$$\begin{aligned}EI v_{01} &= C_1x + D_1; \\EI v_{12} &= C_2x + D_2 + \frac{m(x-a)^2}{2}; \\EI v_{23} &= C_3x + D_3 + \frac{m(x-a)^2}{2} + \frac{P(x-b)^3}{6}; \\EI v_{34} &= C_4x + D_4 + \frac{m(x-a)^2}{2} + \frac{P(x-b)^3}{6} + \frac{p(x-c)^4}{24}; \\EI v_{45} &= C_5x + D_5 + \frac{m(x-a)^2}{2} + \frac{P(x-b)^3}{6} + \frac{p(x-c)^4}{24} - \frac{p(x-d)^4}{24}.\end{aligned}$$



Constantele de integrare se vor determina în baza condițiilor de continuitate a fibrei medii deformate în punctele de graniță între intervale, astfel:

$$\begin{aligned} x = 0, v'_{01} = \varphi_0 &\Rightarrow EI \varphi_0 = C_1; \\ x = a, v'_{01} = v'_{12} &\Rightarrow C_1 = C_2; \\ x = b, v'_{12} = v'_{23} &\Rightarrow C_2 = C_3; \\ &\vdots \\ C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C; & \quad C = EI \varphi_0. \end{aligned}$$

Notându-se cu  $v_0$  săgeata în origine și punându-se condițiile de continuitate în termeni de săgeți, se obține:

$$\begin{aligned} x = 0, v_{01} = v_0 &\Rightarrow EI v_0 = D_1; \\ x = a, v_{01} = v_{12} &\Rightarrow D_1 = D_2; \\ x = b, v_{12} = v_{23} &\Rightarrow D_2 = D_3; \\ &\vdots \\ D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D; & \quad D = EI v_0. \end{aligned}$$

În final, ținându-se seama de constantele de integrare de mai sus, expresiile generale ale rotirii și săgeții, pentru corpul considerat, sunt de forma:

**rotiri**

$$EI\varphi = EI\varphi_0 \Big|_{01} + m(x-a) \Big|_{12} + \frac{P(x-b)^2}{2} \Big|_{23} + \frac{p(x-c)^3}{6} \Big|_{34} - \frac{p(x-d)^3}{6} \Big|_{45};$$

**săgeți**

$$Elv = Elv_0 + EI\varphi_0 x \Big|_{01} + \frac{m(x-a)^2}{2} \Big|_{12} + \frac{P(x-b)^3}{6} \Big|_{23} + \frac{p(x-c)^4}{24} \Big|_{34} - \frac{p(x-d)^4}{24} \Big|_{45}.$$

*Exemplu*

Aplicația 1

**Bară încadrată la un capăt, încărcată cu o forță concentrată la capătul liber (fig.2)**

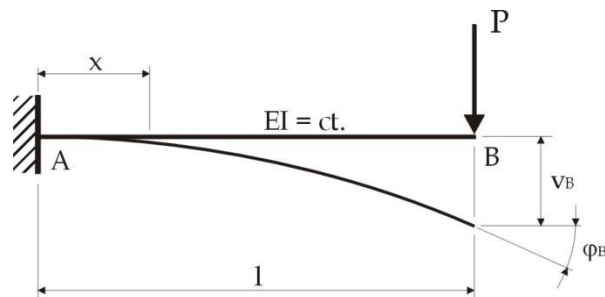


fig.2

Pentru a putea scrie expresiile generale ale săgeții și rotirii în formă particularizată pentru sistemul din figura de mai sus, se calculează valorile forțelor de legătură din reazemul încadrat A (se aduce tronsonul AB din figura 2 la aspectul generalizat, în care nu i se precizează modul de rezemare, ci doar setul de încărcări sub acțiunea cărora corpul se găsește în stare de echilibru); se obține schema de calcul, astfel (fig.3):

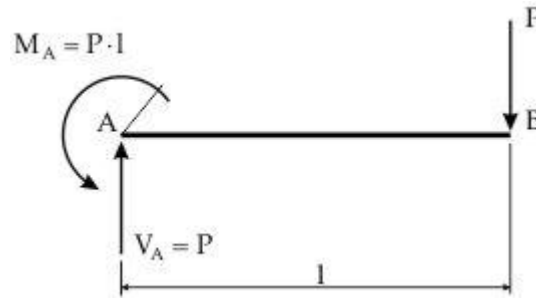


fig.3

Pentru tronsonul AB din figura 3 se particularizează expresiile rotirii și săgeții, pornindu-se de la cazul general demonstrat, astfel:

**rotiri**

$$EI\varphi = EI\varphi_A + Pl \cdot x - \frac{P \cdot x^2}{2} \Big|_{AB};$$

**săgeți**

$$EIv = EIv_A + EI\varphi_A \cdot x + \frac{Pl \cdot x^2}{2} - \frac{P \cdot x^3}{6} \Big|_{AB}.$$

Pentru determinarea constantelor de integrare  $EI\varphi_A$ ,  $EIv_A$  (rotirea și săgeata în originea A), se pun condiții la limită, astfel, pentru consola din figura 2:

$$x = 0; \quad \varphi_A = 0 \Rightarrow EI\varphi_A = 0,$$

$$x = 0; \quad v_A = 0 \Rightarrow EIv_A = 0.$$

Expresia rotirii capătului liber B se obține substituind coordonata corespunzătoare  $x = l$  în expresia rotirilor, astfel:

$$EI\varphi_B = Pl \cdot l - \frac{P \cdot l^2}{2}; \quad \varphi_{\max} = \varphi_B = \frac{Pl^2}{2EI},$$

iar săgeata secțiunii B, prin înlocuirea parametrului de poziție al acesteia,  $x = l$ , în expresia săgeților, de unde:

$$EIv_B = \frac{Pl \cdot l^2}{2} - \frac{P \cdot l^3}{6}; \quad v_{\max} = v_B = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Aplicația 2

**Bară simplu rezemată la capete, încărcată la mijloc cu o forță concentrată (fig.4)**

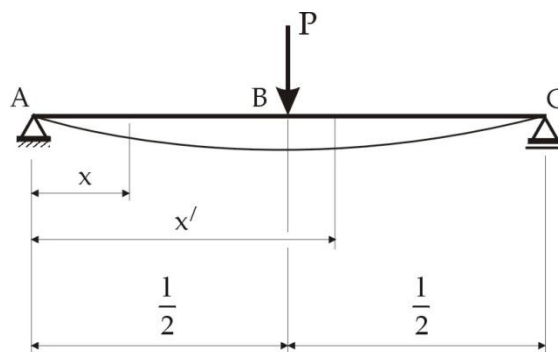


fig.4

Se obține schema de calcul pentru tronsonul AC prin determinarea reacțiunilor din peazemele A și C, astfel:

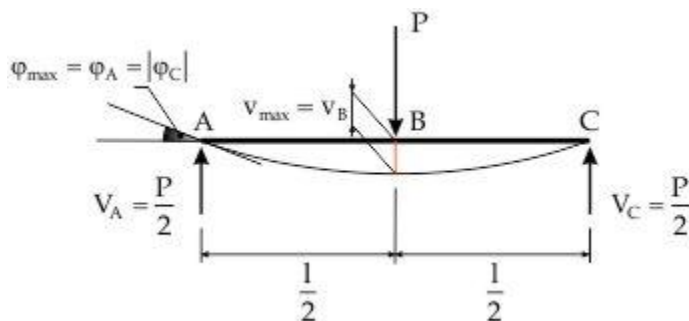


fig.5

Se particularizează expresiile rotirii și săgeții pentru grinda AC din figura 5, pornindu-se de la cazul general demonstrat, astfel:

**rotiri**

$$EI\varphi = EI\varphi_A - \frac{P}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{AB} + \frac{P}{2} \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \Big|_{BC} ;$$

**săgeți**

$$EIv = EIv_A + EI\varphi_A \cdot x - \frac{P}{2} \cdot \frac{x^3}{6} \Big|_{AB} + \frac{P}{6} \left( x - \frac{1}{2} \right)^3 \Big|_{BC} .$$

Pentru determinarea constantelor de integrare  $EI\varphi_A$ ,  $EIv_A$  (rotirea și săgeata în originea A), se pun condiții la limită, astfel, pentru grinda simplu rezemată din figura 4:

$$x = 0; \quad v_A = 0 \Rightarrow EIv_A = 0,$$

$$x = 1; \quad v_C = 0 \Rightarrow 0 = EI\varphi_A \cdot 1 - \frac{P}{2} \cdot \frac{1^3}{6} + \frac{P}{6} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^3 ; \quad EI\varphi_A = EI\varphi_{\max} = \frac{PI^2}{16}.$$

Obs.

Din rațiuni de simetrie a schemei de calcul,  $\varphi_{\max} = \varphi_A = |\varphi_C|$  (vezi figura 5).

Pentru determinarea valorii maxime a săgeții în cazul corpului în discuție, se egalează cu zero prima derivată a expresiei săgeții (vezi găsirea punctelor de extrem ale unei funcții), conform paragrafului 2.3.5,

$\frac{dv}{dx} = \varphi$ , prin urmare:

$$\frac{PI^2}{16} - \frac{Px^2}{4} + \frac{P}{2} \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3I^2}{16} = 0,$$

ecuație a cărei soluții confirmă varianta intuitivă  $x = 1/2$ .

Înlocuind în polinomul săgeților parametrul de poziție găsit, se obține:

$$EIv_B = EIv_{\max} = \frac{PI^2}{16} \cdot \frac{1}{2} - \frac{P}{12} \left( \frac{1}{2} \right)^3 ; \quad EIv_{\max} = \frac{PI^3}{48}.$$

### Bibliografie

- Andreescu I., Mocanu Șt.,- *Compendiu de Rezistența Materialelor* (curs), Ed. MatrixRom, București, 2005, ISBN 973-685-869-3, (Cap.1, p.153).
- Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.,- *Rezistența Materialelor I* (curs), Universitatea Tehnică de Construcții București, 1995, (Cap.1, p.215÷219).
- Suport de curs de Rezistența Materialelor (ing.zi, ing.seral), format multimedia și site – Mocanu Șt., ediție de uz intern, Facultatea de Utilaj Tehnologic, 2006, (curs 10).

### Test de autoevaluare 2.3.5

1. Prima derivată în raport cu  $x$  a săgeții, este rotirea (adevărat/fals).
2. Prima derivată în raport cu  $x$  a rotirii, este săgeata (adevărat/fals).
3. Rotirea  $\varphi$  este considerată pozitivă când axa  $x$  se suprapune peste tangenta în punct la secțiune, prin rotire în sens orar (adevărat/fals).
4. Metoda integrării directe a ecuației fibrei medii deformate implică, pentru un sistem cu trei intervale de integrare, găsirea a doar două constante (de integrare) (adevărat/fals).
5. Constantele de integrare se determină punându-se .....
6. Metoda parametrilor în origine implică, pentru un sistem cu două intervale de integrare, găsirea a doar două constante (de integrare) (adevărat/fals).
7. Metoda parametrilor în origine reprezintă varianta sistematizată a .....

Sugestii privind rezolvarea testului de auto-evaluare 2.3.1+2.3.2

1. Adevărat.
2. Fals.
3. Adevărat.
4. Fals.
5. Condiții la limită.
6. Adevărat.
7. Metodei directe de integrare.

## 2.3 Solicitarea de încovoiere simplă VI

Scopul actualei prelegeri este de a demonstra și stabili modalitățile generice de abordare în ceea ce privește tratarea problemelor din Rezistența Materialelor din punctul de vedere al solicitării de încovoiere simplă a barelor drepte.

Paragraful 2.3.6 tratează chestiuni legate de variația tensiunilor în jurul unui punct, respectiv tensiuni pe secțiuni înclinate.

Timpul alocat pentru studiul în totalitate al paragrafului 2.3.6 este de circa 1,5 ore.

După parcurgerea paragrafului 2.3.6 al capitolului 2.3, cursantul va fi capabil:

- să vizualizeze și să reprezinte corect starea de tensiune plană de pe fețele unui element în jurul unui punct considerat;
- să efectueze operații specifice de evaluare calitativă și cantitativă a tensiunilor și unghiurilor de înclinare a fețelor pe care acestea se dezvoltă;
- să identifice și să corecteze în timp util eventualele greșeli de calcul sau raționament tehnic.

### 2.3.6 Variația tensiunilor în jurul unui punct, în cazul stării de tensiune plană

#### 2.3.6.1 Expresiile tensiunilor pe o secțiune înclinată cu unghiul $\alpha$

Se poate vorbi despre o **stare de tensiune plană** în cazul în care tensiunile se află conținute într-un singur plan; în acest caz, tensiunile pe plane cu vector de orientare  $z$  ( $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ ), sunt nule. Pe secțiunile transversale normale la axa  $x$  apar tensiuni normale  $\sigma_x$  și tensiuni tangențiale  $\tau_{yx}$ , respectiv pe secțiuni normale la axa  $y$ , tensiuni normale  $\sigma_y$  și tangențiale  $\tau_{xy}$ .

Dacă asupra barei de secțiune dreptunghiulară cu lățime unitară (vezi figura 1), acționează forțe distribuite uniform, se admite o distribuție uniformă pe lățime și pentru tensiuni, fiind vorba de o stare plană de tensiuni redusă la planul median al secțiunii.

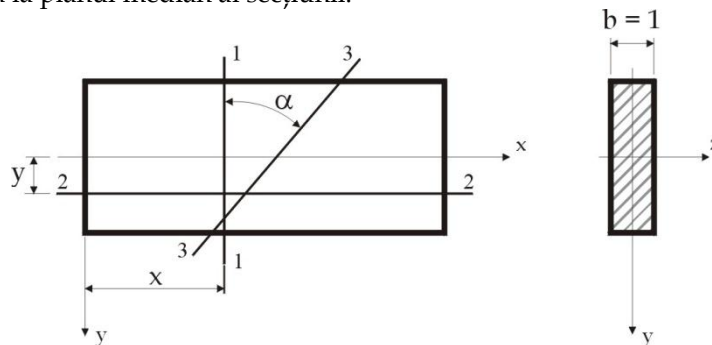


fig.1

Obs.

În practică se poate extinde teoria de la starea de tensiuni plană și pentru barele de secțiune transversală oarecare, datorită faptului că tensiunile normale și tangențiale sunt distribuite uniform pe lățimea secțiunii.

Se secționează bara cu planele 1-1 și 2-2, plane pe care tensiunile  $\sigma_x, \tau_{yx}$ , respectiv  $\sigma_y, \tau_{xy}$  se presupun cunoscute, determinate fiind cu relațiile corespunzătoare solicitărilor simple. Pe o secțiune oarecare 3-3, înclinată cu unghiul  $\alpha$  în raport cu axa  $y$  (vezi figura 1), tensiunile corespunzătoare  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  au valori necunoscute.

Se izolează prisma elementară triunghiulară delimitată de planele de secțiune 1-1, 2-2 și 3-3; prin reducere în planul median se obține triunghiul dreptunghic din figura 2 (vedere din lateral a elementului prismatic de formă triunghiulară):

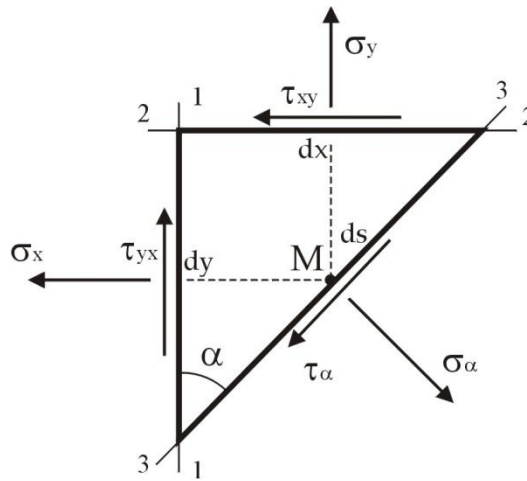


fig.2

Elementul prismatic din figura 2 este în stare de echilibru; ecuațiile de echilibru static pot fi exprimate în forma:

- ecuația de moment în raport cu punctul M:

$$\sum M_{(M)} = 0 \Rightarrow \tau_{yx} \cdot dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{xy} \cdot dx \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} = 0,$$

rezultă:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy},$$

fiind, practic, satisfăcută legea dualității tensiunilor tangențiale (vezi curs 4).

- ecuația de proiecții pe direcția tensiunii normale  $\sigma_\alpha$ :

$$\sigma_\alpha \cdot ds \cdot 1 - \sigma_x \cdot dy \cdot 1 \cdot \cos \alpha - \sigma_y \cdot dx \cdot 1 \cdot \sin \alpha - \tau_{yx} \cdot dy \cdot 1 \cdot \sin \alpha - \tau_{xy} \cdot dx \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 0,$$

dar  $dx = ds \cdot \sin \alpha$  și  $dy = ds \cdot \cos \alpha$ , prin urmare, rezultă:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.$$

- ecuația de proiecții pe direcția tensiunii tangențiale  $\tau_\alpha$ :

$$\tau_\alpha \cdot ds \cdot 1 + \sigma_x \cdot dy \cdot 1 \cdot \sin \alpha - \sigma_y \cdot dx \cdot 1 \cdot \cos \alpha - \tau_{yx} \cdot dy \cdot 1 \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot dx \cdot 1 \cdot \sin \alpha = 0,$$

rezultă:

$$\tau_\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Utilizând relațiile trigonometrice elementare:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

prin prelucrarea relațiilor tensiunilor  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  se obțin:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

### 2.3.6.2 Tensiuni normale principale și direcții principale de tensiune

Pentru determinarea tensiunilor principale (a tensiunilor normale cu valori extreme), se derivează expresia  $\sigma_\alpha$  în funcție de parametrul  $2\alpha$ :

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_\alpha = 0;$$

rezultă că planul pe care tensiunea normală  $\sigma$  are o valoare extremă **este un plan pe care tensiunea tangențială  $\tau$  este nulă**. Planele pe care tensiunea tangențială este nulă sunt numite **plane principale de tensiune**.

Prin împărțirea cu  $\cos 2\alpha$  a expresiei de mai sus, rezultă:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

expresie care pentru  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , are două soluții,  $2\alpha'$  și  $2\alpha' + \pi$ , adică vor exista două plane principale de tensiune perpendiculare între ele, deci **două direcții principale de tensiune**,  $\alpha'$  și  $\alpha' + \frac{\pi}{2}$ , pentru care tensiunile normale sunt  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$ , cu  $\sigma_1 > \sigma_2$  prin convenție ( $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ ;  $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ ).

Utilizându-se relațiile trigonometrice:

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}; \quad \cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

în care se substituie expresia lui  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , se obțin:

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}; \quad \cos 2\alpha = \pm \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}.$$

Prin introducerea expresiilor de mai sus în forma finală a relației pentru  $\sigma_\alpha$ , se obțin tensiunile normale principale în forma:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Pentru a se stabili care din unghiurile  $\alpha'$  și  $\alpha' + \frac{\pi}{2}$  corespunde axei principale 1 (pe care se proiectează  $\sigma_1$ ), se pune condiția de maxim  $\frac{d^2\sigma_\alpha}{d(2\alpha)^2} < 0$ , astfel:

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d(2\alpha)^2} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau_{xy} \operatorname{tg} 2\alpha\right) \cos 2\alpha;$$

având în vedere că  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ , rezultă:

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d(2\alpha)^2} = - \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right] \frac{\sin 2\alpha}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}} = - \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right] \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\tau_{xy}},$$

în plus  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$ , așadar:

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d(2\alpha)^2} = - \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right] \frac{2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\tau_{xy}} < 0,$$

ceea ce reduce condiția de maxim la:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\tau_{xy}} > 0.$$

### 2.3.6.3 Tensiuni tangențiale maxime

Se exprimă variația tensiunilor în jurul unui punct alegând drept axe de referință axele principale ale secțiunii (vezi figura 3).

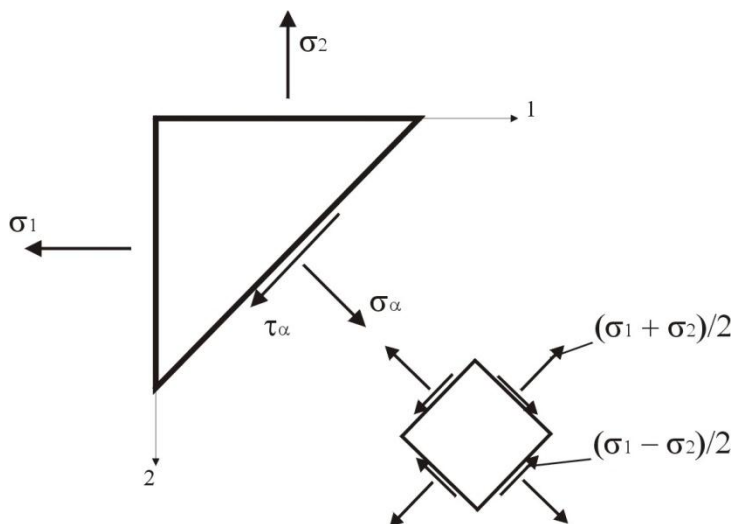


fig.3

Rezultă  $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \tau_{xy} = 0$ ; în acest caz, expresiile tensiunilor de pe secțiunea înclinată devin:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Valorile extreme ale tensiunii tangențiale  $\tau_\alpha$  se obțin pentru  $\sin 2\alpha = \pm 1$  sau  $\alpha_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4}$ , prin urmare, pentru planele bisectoare ale planelor principale de tensiune, astfel:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{\min} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Tensiunea normală la planul pe (în) care acționează  $\tau_{\max}$ , respectiv  $\tau_{\min}$ , are valoarea:



$$\sigma_{\pm 45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

### Bibliografie

- Andreescu I., Mocanu Șt.,- *Compendiu de Rezistența Materialelor* (curs), Ed. MatrixRom, București, 2005, ISBN 973-685-869-3, (Cap.1, p.168÷172).
- Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.,- *Rezistența Materialelor I* (curs), Universitatea Tehnică de Construcții București, 1995, (Cap.1, p.147÷151).
- Suport de curs de Rezistența Materialelor (ing.zi, ing.seral), format multimedia și site – Mocanu Șt., ediție de uz intern, Facultatea de Utilaj Tehnologic, 2006, (curs 11).