Solicitarea de încovoiere simplă. Sinteză

Scopul actualei prelergeri este de a demonstra şi stabili modalitățile efective de abordare în ceea ce priveşte tratarea problemelor din Rezistența Materialelor din punctul de vedere al solicitării de încovoiere simplă a barelor drepte.

Paragraful 2.3.7 tratează chestiuni legate de rezolvarea unei aplicații de Rezistența Materialelor, rezolvare ce implică parcurgerea tuturor algoritmilor de lucru prezentați în cadrul capitolului 2.3, inclusiv etape de calcul elementar utilizate în capitolele anterioare.

Timpul alocat pentru studiul în totalitate al paragrafului 2.3.7 este de circa 2 ore.

2.3.7 Problemă de sinteză la încovoiere. Aplicație

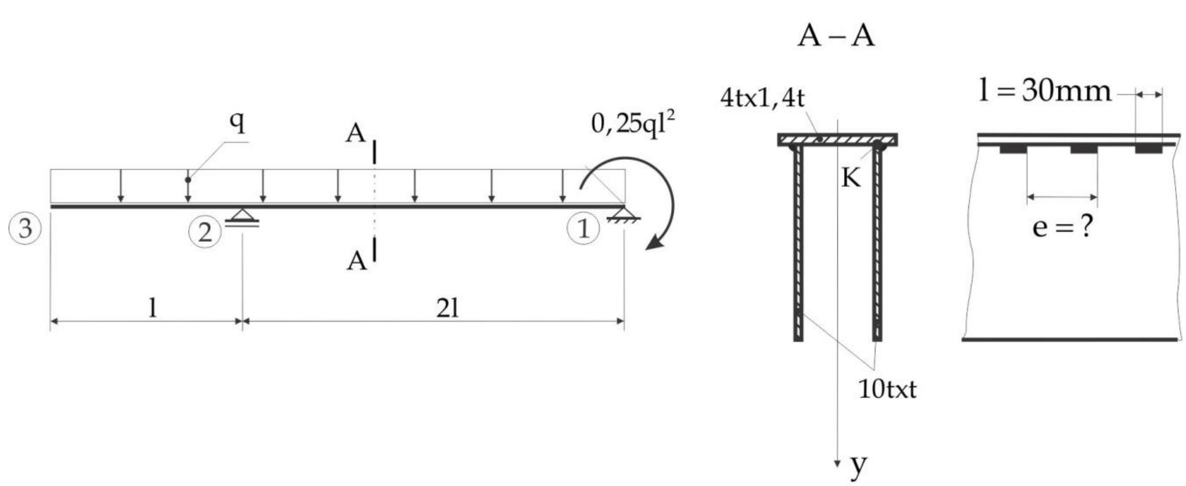
Pentru bara simplu rezemată cu consolă din figura de mai jos, se cer:

- dimensionarea secțiunii barei $(t=?)$, exemplu numeric: $q=28kN/m,\ l=1,2m,$

$\sigma_a=150N/mm^2$;

- stabilirea tensiunilor principale σ_1,σ_2 şi a direcțiilor de tensiune principale în punctul K aflat la limita dintre talpă şi inimi, punct ce aparține de secțiunea periculoasă a barei;
- determinarea săgeții maxime pentru zona cuprinsă între reazeme, $E=2,1\cdot10^5N/mm^2$;
- efectuarea calculului la lunecare la nivelul prinderii tălpii superioare de inima secțiunii,

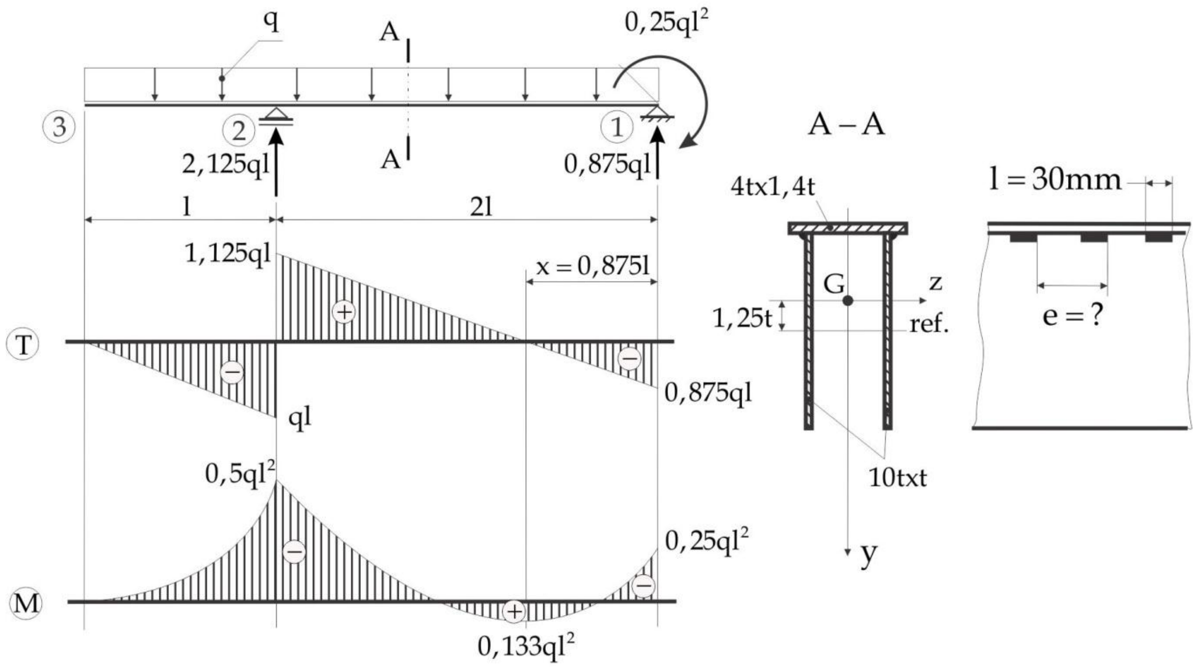
$l=30mm;\quad \tau_{as}=0,65\sigma_a$.



Se determină forțele de legătură (reacțiunile) din reazemele sistemului, utilizându-se ecuațiile de echilibru static exprimate în termeni de moment, astfel:

$$\Sigma M_2 = 0; \quad q \cdot 3l \cdot 0,5l + 0,25ql^2 - V_1 \cdot 2l = 0 \Rightarrow V_1 = 0,875ql,$$
$$\Sigma M_1 = 0; \quad q \cdot 3l \cdot 1,5l - 0,25ql^2 - V_2 \cdot 2l = 0 \Rightarrow V_2 = 2,125ql.$$

Se trasează diagramele de efort secțional, conform regulilor stabilite anterior:



$$T_{3dr} = 0;$$
$$T_{2st} = -q \cdot l = -ql;$$
$$T_{2dr} = -q \cdot l + 2,125ql = 1,125ql;$$
$$T_{1st} = -q \cdot l + 2,125ql - q \cdot 2l = -0,875ql,$$
$$x = \frac{0,875ql}{q} \Rightarrow x = 0,875l,$$
$$M_3 = 0;$$
$$M_2 = -q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = -0,5ql^2;$$
$$M_x = 0,875ql \cdot 0,875l - q \cdot 0,875l \cdot \frac{0,875l}{2} - 0,25ql^2 = 0,133ql^2;$$
$$M_1 = -0,25ql^2.$$

Se stabileşte poziția centrului de greutate a secțiunii (în raport cu o axă de referință ce trece prin centrele de greutate a inimilor secțiunii), precum şi valoarea momentului de inerție axial în raport cu axa neutră a secțiunii (Oz), astfel:

$$y_G = \frac{-4t \cdot 1,4t \cdot 5,7t}{4t \cdot 1,4t + 2 \cdot 10t \cdot t} \Rightarrow y_G = -1,25t;$$

$$I_z = \frac{4t\cdot(1,4t)^3}{12} + 4t\cdot 1,4t(5,7t-1,25t)^2 + 2\left(\frac{t\cdot(10t)^3}{12} + t\cdot 10t\cdot(1,25t)^2\right),$$

$$I_z = 309,73t^4.$$

Pornindu-se de la relația de definiție, se exprimă valoarea modulului de rezistență axial efectiv, în raport cu axa neutră a secțiunii:

$$W_z \overset{def.}{=} \frac{I_z}{y_{max}} \Rightarrow W_z = \frac{309,73t^4}{6,25t} = 49,56t^3;$$

se stabilește valoarea modulului de rezistență axial necesar, din formula de dimensionare din condiția de rezistență de la solicitarea de încovoiere simplă:

$$W_{z\,nec} = \frac{M_{z\,max}}{\sigma_a} \Rightarrow W_{z\,nec} = \frac{0,5\cdot 28\cdot 1,2^2\cdot 10^6}{150} = 1,344\cdot 10^5\,mm^3,$$

dimensionarea realizându-se prin egalarea, la limită, a celor două valori ale modulului de rezistență axial:

$$W_z \overset{lim.}{=} W_{z\,nec};$$

$$49,56t^3 = 1,344\cdot 10^5 \Rightarrow t_{nec} = \sqrt[3]{\frac{1,344\cdot 10^5}{49,56}} = 13,95mm,$$

se adoptă $t_{ef} = 14mm$.

Se definește starea de efort la nivelul secțiunii periculoase (2dr.), astfel:

$$T_y = 1,125ql \Rightarrow T_y = 1,125\cdot 28\cdot 1,2 = 37,8kN(+);$$

$$M_z = 0,5ql^2 \Rightarrow M_z = 0,5\cdot 28\cdot 1,2^2 = 20,16kNm(-).$$

Se exprimă starea de tensiune la nivelul punctului dorit (K), prin utilizarea formulelor Navier și Juravski:

$$\sigma_{xK} = \frac{M_z}{I_z}\cdot y_K \Rightarrow \sigma_{xK} = \frac{20,16\cdot 10^6}{309,73\cdot 14^4}\left(\frac{10}{2}-1,25\right)\cdot 14 = 88,95N/mm^2(+);$$

$$\tau_{yxK} = \frac{T_y\cdot S_{zK}}{b_K\cdot I_z} \Rightarrow \tau_{yxK} = \frac{37,8\cdot 10^3\left[4\cdot 1,4\cdot(5,7-1,25)\right]\cdot 14^3}{2\cdot 14\cdot 309,73\cdot 14^4} = 7,76N/mm^2(+).$$

Se calculează valorile tensiunilor normale principale și poziția direcțiilor principale de tensiune; starea de tensiune în jurul punctului K este:

$$\sigma_x = 88,95N/mm^2(+);$$

$$\sigma_y = 0;$$

$$\tau_{yx} = 7,76N/mm^2(+);$$

$$\tau_{xy} = 7,76N/mm^2(-),$$

astfel:

$$\sigma_{1,2}=\frac{88,95}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{88,95^2+4\cdot(-7,76)^2}\Rightarrow\sigma_1=89,63\mathrm{N/mm^2},$$
$$\mathrm{tg}(2\alpha)=\frac{2\cdot(-7,76)}{88,95}\Rightarrow\alpha_1=-9,89^0.$$

Se scriu expresiile generale ale rotirii şi săgeții, utilizând metoda parametrilor în origine:

$$EI\varphi=EI\varphi_3+\frac{q\cdot x^3}{6}\Bigg|_{32}-\frac{2,125ql(x-l)^2}{2}\Bigg|_{21};$$
$$EIy=EIy_3+EI\varphi_3\cdot x+\frac{q\cdot x^4}{24}\Bigg|_{32}-\frac{2,125ql(x-l)^3}{6}\Bigg|_{21},$$

parametrii în origine obținându-se punând condiții la limită în reazeme:

$$\left.\begin{array}{l} x=l;\quad y_2=0\Rightarrow 0=EIy_3+EI\varphi_3\cdot l+\dfrac{ql^4}{24}, \\ x=3l;\quad y_1=0\Rightarrow 0=EIy_3+EI\varphi_3\cdot 3l+\dfrac{q\cdot(3l)^4}{24}-\dfrac{2,125ql\cdot(2l)^3}{6} \end{array}\right\}\Rightarrow EI\varphi_3=-2,5\cdot10^{-1}ql^3,\quad EIy_3=2,083\cdot10^{-1}ql^4.$$

Pentru aflarea săgeții maxime pe zona dintre reazeme (2-1), se egalează expresia rotirilor cu 0 şi se reține rădăcina convenabilă a ecuației, astfel:

$$0=-2,5\cdot10^{-1}ql^3+\frac{q\cdot x^3}{6}-\frac{2,125ql(x-l)^2}{2},\quad x_1=1,46\mathrm{m},\quad x_2=2,57\mathrm{m},\quad x_3=3,62\mathrm{m}\Rightarrow x_{y_{max}}=2,57\mathrm{m};$$

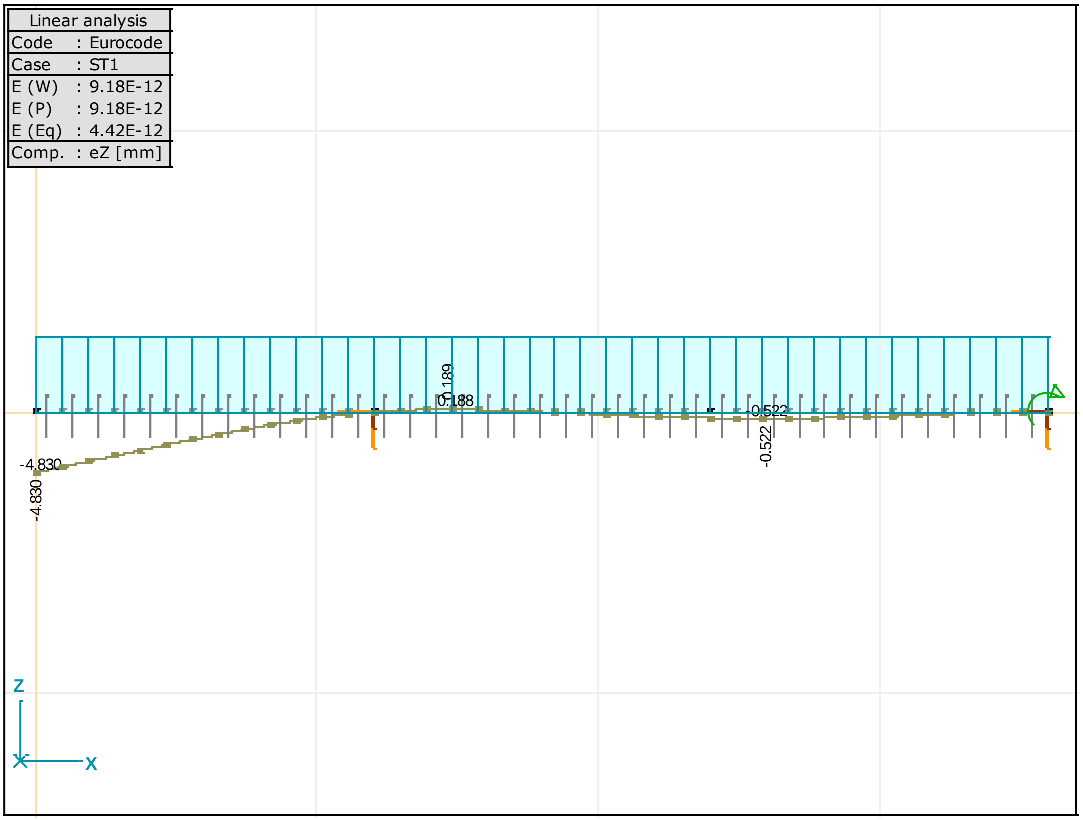
$$EIy_{max}^{2-3}=2,083\cdot10^{-1}\cdot28\cdot1,2^4-2,5\cdot10^{-1}\cdot28\cdot1,2^3\cdot2,57+\frac{28\cdot2,57^4}{24}-\frac{2,125\cdot28\cdot1,2\cdot(2,57-1,2)^3}{6};$$
$$EIy_{max}^{2-3}=1,304\mathrm{kNm^3}\Rightarrow y_{max}^{2-3}=\frac{1,304\cdot10^{12}}{2,1\cdot10^5\cdot309,7\cdot14^4}=0,522\mathrm{mm}.$$

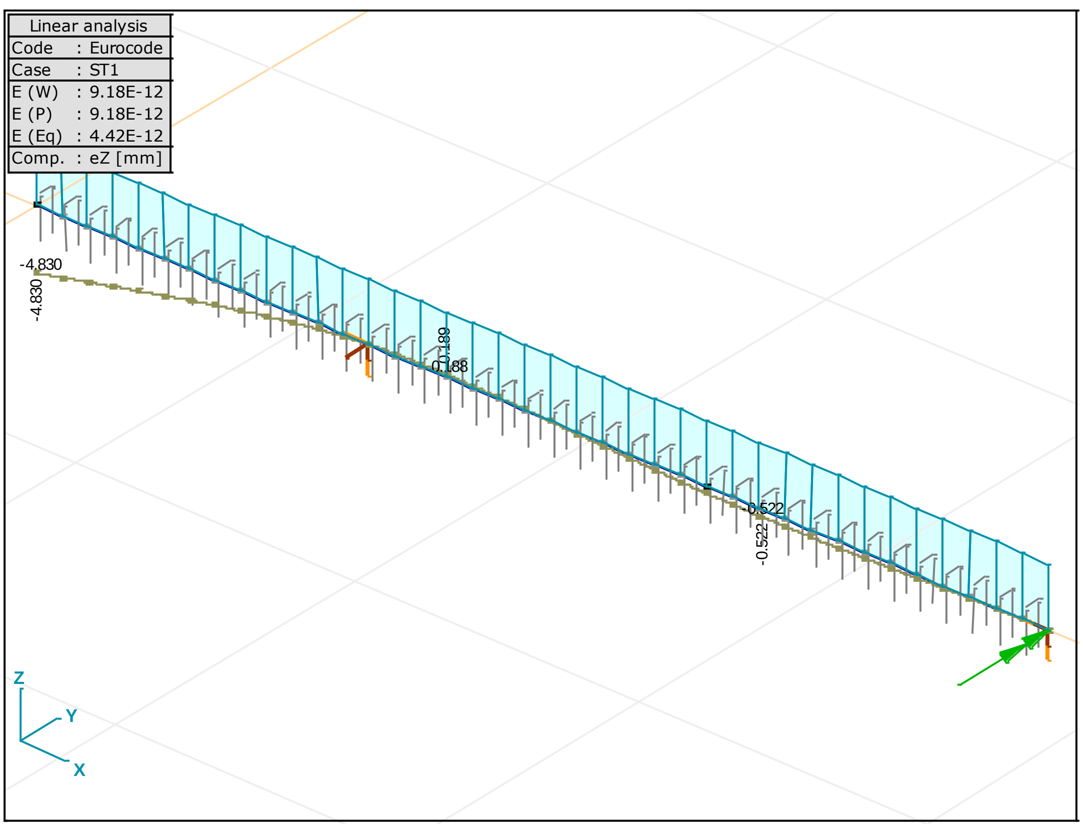
Se face calculul la lunecare la nivelul prinderii tălpii superioare de elementele tip inimă, astfel:

$$\left(S_z=4t\cdot1,4t\cdot(5,7t-1,25t)=24,92t^3\right),$$

$$e\le\frac{\overbrace{2\cdot\overbrace{\underbrace{0,7\cdot14}_{a}\cdot\underbrace{(30-2\cdot0,7\cdot14)}_{l_s=l-2a}}^{A_s}\cdot\underbrace{0,65\cdot150}_{\tau_{as}}}^{N_{cap}^{imb}}\cdot\underbrace{309,7\cdot14^4}_{I_z}}{\underbrace{1,125\cdot28\cdot1,2\cdot10^3}_{T_{y\,max}}\cdot\underbrace{24,92\cdot14^3}_{S_z}}=91,48\mathrm{mm},$$

se adoptă $e=90\mathrm{mm}$.


Linear analysis
Code : Eurocode
Case : ST1
E (W) : 9.18E-12
E (P) : 9.18E-12
E (Eq) : 4.42E-12
Comp. : eZ [mm]
0.189
0.188
-0.522
-0.522
-4.830
-4.830
Z
X


Linear analysis
Code : Eurocode
Case : ST1
E (W) : 9.18E-12
E (P) : 9.18E-12
E (Eq) : 4.42E-12
Comp. : eZ [mm]
-4.830
-4.830
0.189
0.188
-0.522
-0.522
Z
Y
X

Obs.

Corectitudinea rezultatelor obținute se poate studia cu ajutorul aplicațiilor software ce apelează la metoda elementului finit, de exemplu AxisVM9, Student edition (vezi imaginile de mai sus); a fost pusă în evidență forma deformatei barei precum şi valorile proiecțiilor deplasărilor pe verticală a unor secțiuni caracteristice.

Pentru studiu, se va determina, pentru început, valoarea săgeții extremității libere a consolei sistemului (nodul 3), în consecință:

$$EIy_3 = 2,083 \cdot 10^{-1} ql^4;$$
$$EIy_3 = 2,083 \cdot 10^{-1} \cdot 28 \cdot 1,2^4 = 12,1 kNm^3;$$
$$y_3 = \frac{12,1 \cdot 10^{12}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 309,7 \cdot 14^4} = 4,84 mm,$$

cea de-a treia valoare prezentă pe imaginile extrase din datele de ieşire ale tratării numerice fiind săgeata corespunzătoare soluției $x_1 = 1,46m$ a ecuației obținute prin egalarea expresiei generale a rotirilor cu 0 (valoarea maximă a deplasării „negative”pe forma deformată a sistemului), astfel:

$$x = 1,46m;$$
$$EIy'_{max} = 2,083 \cdot 10^{-1} \cdot 28 \cdot 1,2^4 - 2,5 \cdot 10^{-1} \cdot 28 \cdot 1,2^3 \cdot 1,46 + \frac{28 \cdot 1,46^4}{24} - \frac{2,125 \cdot 28 \cdot 1,2 \cdot (1,46 - 1,2)^3}{6};$$
$$EIy'_{max} = -0,474 kNm^3;$$
$$EIy'_{max} = \frac{-0,474 \cdot 10^{12}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 309,7 \cdot 14^4} = -0,189 mm.$$

Se remarcă similitudinea valorilor finale obținute prin cele două metode alternative de calcul, precum şi confirmarea regulilor de corelare a semnului diagramei de moment încovoietor cu forma finală a fibrei medii deformate a sistemului.