Solicitarea de torsiune

Noțiuni introductive

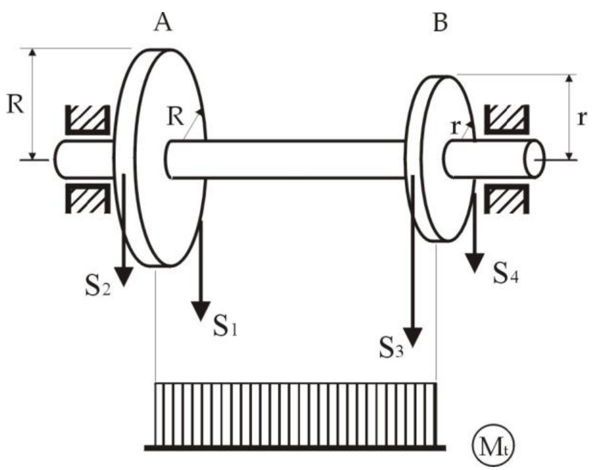
O bară este solicitată la torsiune (răsucire) dacă la nivelul secțiunilor ei transversale forțele interioare se reduc la un cuplu – moment de torsiune M_t – ce acționează în plan normal la axa barei, vectorul moment încovoietor fiind dirijat după tangenta la axa barei în secțiunea considerată.

Deformația barei supusă la torsiune se caracterizează prin rotirea secțiunilor transversale una în raport cu cealaltă în jurul unei axe care, în cazul unei secțiuni având două axe de simetrie, coincide cu axa longitudinală a barei.

În cazul barei de secțiune inelară sau circulară, problema torsiunii se poate rezolva complet cu ipotezele Rezistenței Materialelor, pentru alte tipuri de secțiuni soluționarea problemei fiind posibilă doar cu metodele Teoriei Elasticității.

Momentul de torsiune transmis, în cazul unui arbore pe care sunt montate două roți de curea (vezi figura de mai jos), roata A fiind considerată motoare iar roata B condusă, eforturile din ramurile de curea fiind S_1, S_2, S_3, S_4 cu $S_1 > S_2$ şi $S_3 > S_4$, este:

$$M_{tA} = (S_1 - S_2) \cdot R .$$



Condiția de echilibru cere ca momentul de torsiune preluat de către roata condusă să fie egal cu cel transmis, astfel:

$$M_{tA} = M_{tB},$$

$$M_{tB} = (S_3 - S_4)\cdot r.$$

Momentul de torsiune este constant pe distanța dintre roți (vezi diagrama de moment de torsiune de mai sus).

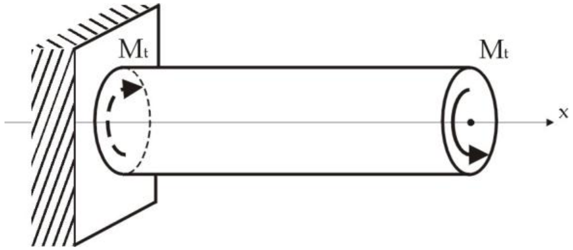
Dacă arborele este antrenat de către un motor de putere $P[kW]$, iar turația de lucru este $n\ [rot/min]$, momentul de torsiune (cuplul motor) corespunzător este:

$$M_t = 9{,}55\frac{P}{n},[kNm].$$

Răsucirea barelor de secțiune circulară sau inelară

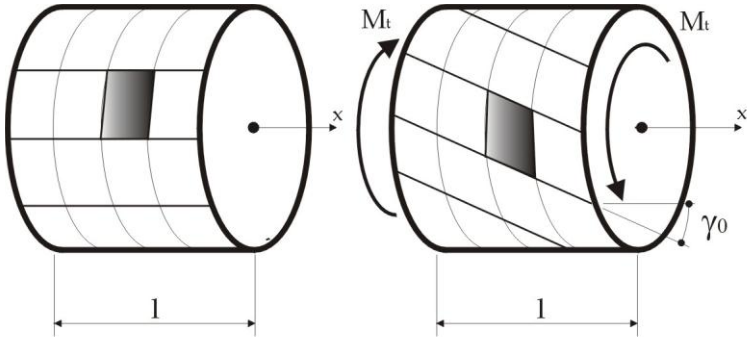
Relația dintre efortul unitar şi momentul de răsucire din secțiune

Fie o bară dreaptă de secțiune circulară încastrată la o extremitate şi acționată la capătul liber de un moment de torsiune M_t.



Studiul geometric

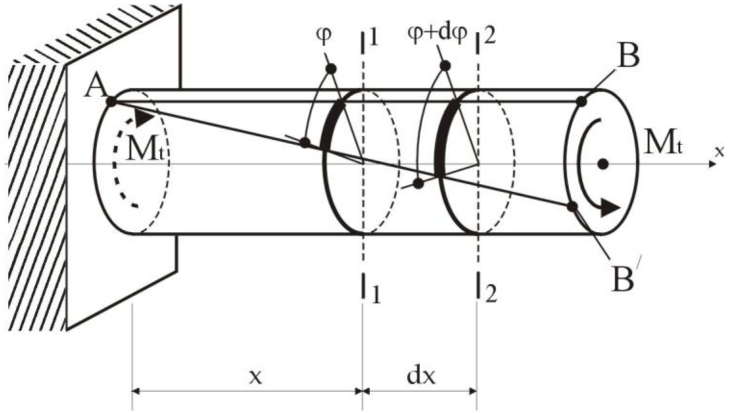
Dacă se trasează pe suprafața laterală a barei, înainte de solicitarea acesteia, o rețea alcătuită dintr-un sistem de linii paralele cu axa longitudinală (generatoare) şi dintr-o serie de cercuri ce constituie conturul exterior al secțiunilor transversale ale barei, se va constata că după răsucirea barei (în cazul unor deformații mici), generatoarele drepte se transformă în curbe helicoidale, conturul secțiunilor transversale (circulare şi plane înainte de deformație) rămâne acelaşi şi după deformație, distanțele dintre secțiuni rămânând aceleaşi; în urma răsucirii, o secțiune oarecare a barei s-a rotit față de alta cu un anumit unghi de torsiune, transformând dreptunghiurile reţelei de referinţă în paralelograme (vezi figura de mai jos).



Ipotezele care stau la baza torsiunii barelor cu secţiune circulară sunt următoarele:

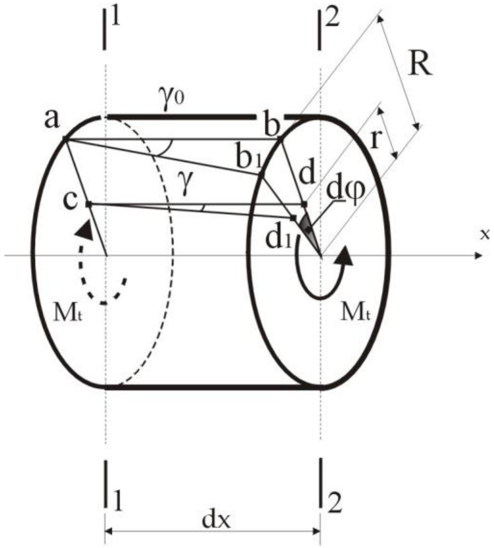
- secţiunile transversale ale barei, plane şi normale la axa acesteia înainte de deformare, rămân plane şi normale şi după deformare (ipoteza secţiunilor plane), secţiunile rotindu-se cu un anumit unghi în jurul axei;
- razele secţiunii rămân drepte şi de aceeaşi lungime şi după deformaţie;
- distanţele (în lungul axei) între diferitele secţiuni transversale nu se modifică în urma solicitării.

Se consideră bara de secţiune circulară de rază R încastrată la o extremitate şi acţionată la capătul liber de momentul de torsiune M_t (vezi figura de mai jos).



În urma deformației, generatoarea AB de pe suprafața laterală a barei ocupă poziția AB/, secțiunea 1-1 situată la distanța x de capătul încastrat se rotește cu unghiul φ față de secțiunea din încastrare, iar secțiunea 2-2, situată la distanța $x + dx$, se rotește față de încastrare cu unghiul $\varphi + d\varphi$.

Se consideră separat un element de lungime dx, element delimitat de secțiunile 1-1 și 2-2, presupunând secțiunea 1-1 fixă pentru evaluarea unghiului de rotire $d\varphi$ al secțiunii 2-2 în raport cu 1-1 (figura de mai jos).



Generatoarea ab va ocupa poziția ab_1 după deformare, cele două segmente formând unghiul γ_0 între ele, unghi ce reprezintă deformația unghiulară pe suprafața cilindrică exterioară a barei și care, în ipoteza micilor deformații se poate scrie:

$$\gamma_0 = \frac{bb_1}{ab} = R\frac{d\varphi}{dx}.$$

Pentru o suprafață cilindrică interioară de rază r, deformația unghiulară va fi:

$$\gamma = \frac{dd_1}{cd} = r\frac{d\varphi}{dx};$$

mărimea $\frac{d\varphi}{dx} = \theta$ se numeşte **răsucire specifică** şi reprezintă rotirea dintre două secțiuni situate la o distanță egală cu unitatea una față de cealaltă.

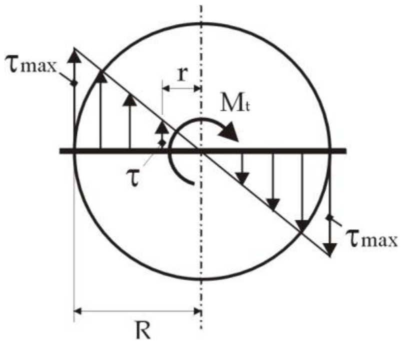
Studiul fizic

Condiția de elasticitate (studiul fizic) este exprimată prin legea lui Hooke scrisă pentru torsiune, astfel:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \theta;$$

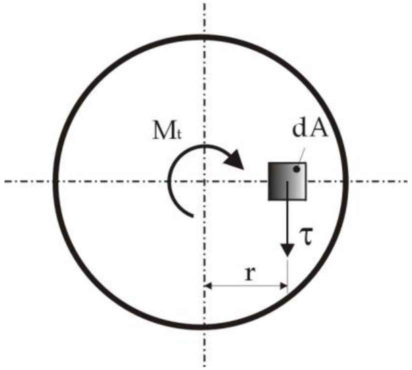
$$\tau_{max} = G \cdot R \cdot \theta,$$

rezultă că tensiunile tangențiale, datorate solicitării de torsiune, variază liniar cu distanța până la axă (sunt nule la nivelul axei longitudinale şi maxime pe contur, vezi figura de mai jos).



Studiul static

Acest studiu face apel la relația de echivalență dintre momentul de torsiune de la nivelul secțiunii şi momentul eforturilor unitare $(\tau \cdot dA)$, eforturi conținute în suprafața secțiunii transversale în discuție, momentul fiind exprimat în raport cu axa longitudinală a barei (vezi figura de mai jos).



Astfel, se poate scrie:

$$M_t = \int_A r \cdot \tau \, dA = G\theta \int_A r^2 \, dA;$$

$$G, \theta = ct., \quad \int_A r^2 dA = I_p,$$

rezultă:

$$M_t = G\theta I_p,$$

astfel:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p}.$$

Produsul GI_p poartă numele de (modul de) rigiditate la torsiune a barei de secțiune circulară sau inelară.

Știind că (legea Hooke), $\tau = G \cdot r \cdot \theta$, se înlocuiește θ din relația de mai sus, obținându-se expresia tensiunii tangențiale datorate momentului de torsiune M_t :

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r;$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R.$$

Se definește drept **modul de rezistență polar** și se notează cu W_p raportul:

$$W_p = \frac{I_p}{R},$$

prin urmare se poate scrie :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \le \tau_a ,$$

relație ce reprezintă condiția de rezistență pentru bara supusă la torsiune.

Deformații la răsucire

Răsucirea specifică se calculează conform relației:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p};$$

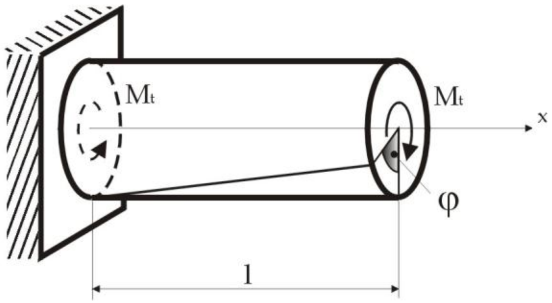
ținându-se seama de:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow d\varphi = \theta dx .$$

Rotirea relativă între două secțiuni aflate la distanța l una față de alta este:

$$\varphi = \int_0^l \theta dx = \frac{M_l\, l}{GI_p}.$$

Pentru consola din figura de mai jos, φ reprezintă unghiul de torsiune la capătul liber al barei.



În situația în care se dorește limitarea rotirilor (depășirea deformațiilor limită la torsiune putând afecta funcționarea normală a arborilor), intervine **condiția de rigiditate** (de deformație):

$$\theta \le \theta_a .$$

Calculul practic la solicitarea de răsucire

A. Condiția (criteriul) de rezistență - $\tau_{max} \le \tau_a$

formula de verificare: $\tau_{max} = \dfrac{M_{t\,max}}{W_{p\,ef}} \le \tau_a$;

formula de dimensionare: $W_{p\ nec.} = \dfrac{M_{t\ max}}{\tau_a}$;

formula de calcul a efortului capabil (moment de torsiune capabil):

$$M_{t\ cap.} = W_{p\ ef} \cdot \tau_a .$$

B. Condiția (criteriul) de rigiditate sau deformație - $\theta_{max} \le \theta_a$

formula de verificare: $\theta_{max} = \dfrac{M_{t\ max}}{G I_{p\ ef}} \le \theta_a$;

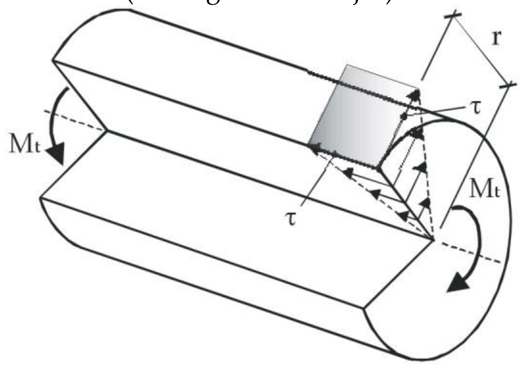
formula de dimensionare: $I_{p\ nec} = \dfrac{M_{t\ max}}{G \cdot \theta_a}$;

formula de calcul a efortului capabil:

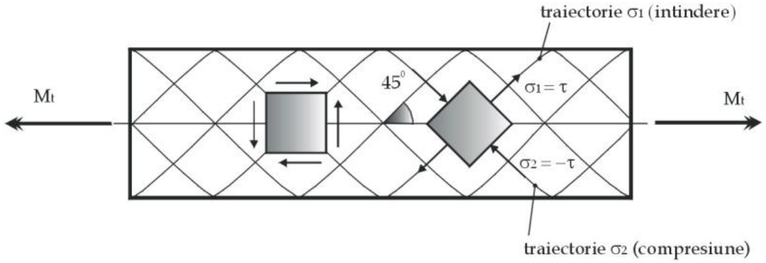
$$M_{t\ cap} = G \cdot I_{p\ ef} \cdot \theta_a .$$

Tensiuni tangențiale de lunecare. Tensiuni principale. Moduri de rupere

Considerându-se o bară de secțiune circulară solicitată la torsiune, pe o secțiune longitudinală, în baza legii dualității tensiunilor tangențiale apar tensiuni τ de lunecare, tensiuni ce au aceeaşi lege de distribuție cu a tensiunilor τ de pe secțiunea transversală (vezi figura de mai jos).



Cele două tensiuni tangențiale τ, din punctul considerat, alcătuiesc un plan tangent la cilindrul de rază r ; elementul din vecinătatea punctului este supus unei stări de tensiune plană (vezi figura de mai jos), prin urmare tensiunile principale şi poziția direcțiilor principale de tensiune din punctul considerat se pot găsi cu relațiile corespunzătoare paragrafului **variația tensiunilor în jurul unui punct**, în care: $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 0$; $\tau \ne 0$, prin înlocuire:



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm\tau;$$

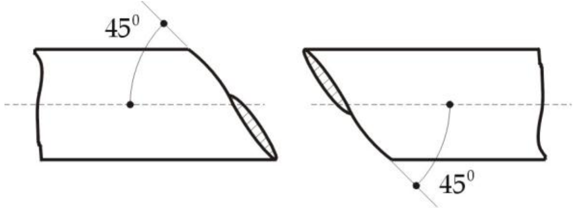
$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau;$$

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty \Rightarrow 2\alpha = 90^0, \quad \alpha = 45^0.$$

În figura de mai sus au fost trasate traiectoriile direcţiilor principale pe o suprafaţă cilindrică de rază r; acestea reprezintă două familii de curbe helicoidale, înclinate la 45^0 faţă de generatoare.

Studiul stării de tensiune efectuat permite explicarea diferitelor moduri de rupere, funcţie de rezistenţa la diferite tipuri de solicitare la care este supus materialul din care este confecţionată piesa în discuţie, astfel:

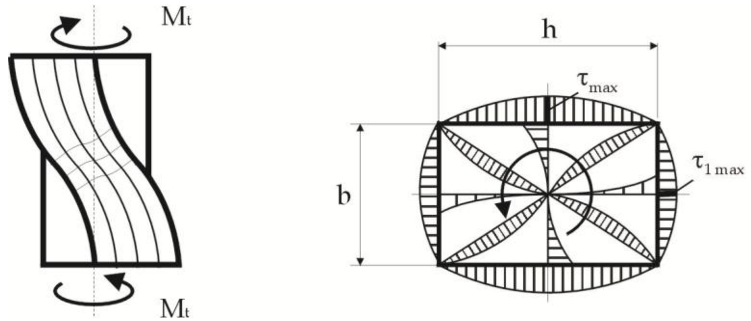
- o bară din oţel moale se rupe datorită tensiunii τ din secţiunea transversală;
- o bară din lemn verde cedează datorită tensiunilor τ din secţiuni longitudinale, prin lunecare în lungul fibrelor;
- o bară din fontă sau beton se rupe datorită tensiunii principale σ_1 (de întindere), după o elice la 45^0 faţă de generatoare – vezi figura de mai jos.



Răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară

Problema torsiunii unei bare cu secțiune transversală necirculară este mai complexă decât cea a barei cu secțiune circulară, deoarece ipotezele admise la bara de secțiune circulară nu sunt valabile pentru barele de secțiune oarecare. Astfel, ipoteza secțiunilor plane nu este respectată (fapt confirmat de experimente), diferitele puncte ale unei secțiuni transversale deplasându-se diferit în lungul axei longitudinale a barei, prin urmare secțiunile transversale deplanându-se.

Dacă pe suprafața laterală a unei bare de secțiune dreptunghiulară constantă se trasează o rețea ortogonală şi apoi se supune bara la torsiune, se constată deplanarea (strâmbarea) secțiunilor transversale (vezi figura de mai jos - stânga).



Dreptunghiurile de pe suprafața laterală a barei se deformează transformându-se în paralelograme, deformarea lor fiind cu atât mai accentuată cu cât sunt situate mai aproape de mijlocul feței laterale; dreptunghiurile din vecinătatea muchiilor rămân aproape nedeformate. Aceste observații duc la concluzia că tensiunile tangențiale maxime au loc la mijlocul fețelor, deoarece în aceste zone deformațiile unghiulare sunt maxime, iar la muchii (în colțuri) unde deformațiile unghiulare sunt nule, tensiunile tangențiale vor fi şi ele nule.

Expresiile care dau tensiunile tangențiale maxime şi deformația specifică unghiulară sunt (vezi figura de sus – dreapta):

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}, \text{ la mijlocul laturii lungi;}$$

$$\tau_{1max} = \gamma \cdot \tau_{max}, \text{ la mijlocul laturii scurte;}$$

$$\theta = \frac{M_t}{G I_t},$$

în care:

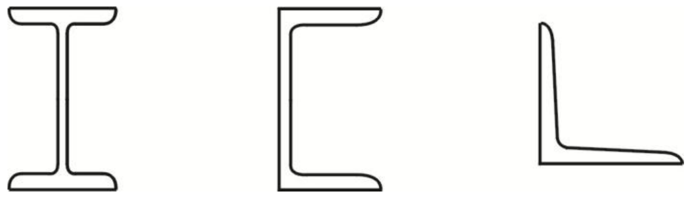
$$I_t = \beta h b^3, \quad W_t = \alpha h b^2,$$

unde α, β, γ sunt coeficienți numerici care depind de raportul $\frac{h}{b}$ al laturilor secțiunii (h fiind latura lungă şi b, latura scurtă a dreptunghiului) – vezi documentul „tabtor” din folderul „permanente” al suportului de curs.

Răsucirea barelor de profil compus

Profil deschis

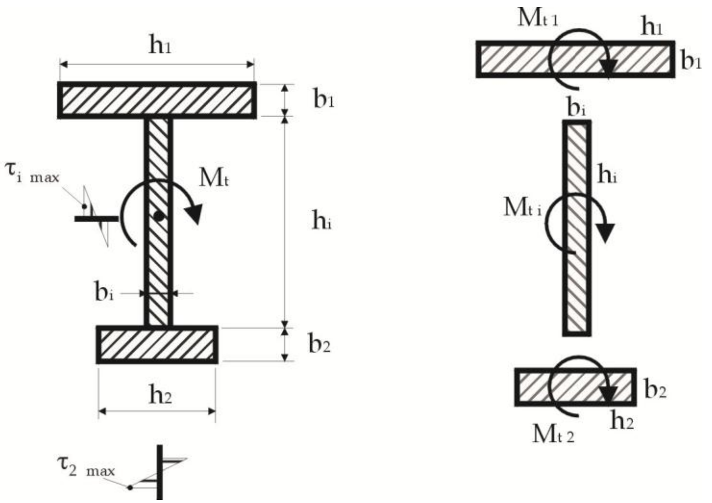
În practică sunt întâlnite frecvent bare a căror secțiune transversală este alcătuită (sau poate fi echivalată) cu elemente geometrice tip dreptunghi îngust legate rigid între ele sau cu un contur curbiliniu deschis, cu grosime mică (vezi figura de mai jos).



În cazul torsiunii libere se poate da o metodă aproximativă pentru determinarea tensiunilor tangențiale maxime şi a unghiului de torsiune, utilizându-se soluția pentru torsiunea secțiunii dreptunghiulare înguste. Astfel, se admite că la solicitarea prin torsiune a secțiunii compuse din figura de mai jos, fiecare dreptunghi lucrează independent, rigiditatea întregii secțiuni fiind dată de suma rigidităților la torsiune pentru fiecare dreptunghi component.

În cazul general, pentru o secțiune alcătuită din n dreptunghiuri componente, h_i şi b_i fiind dimensiunile dreptunghiului „i”, fiind aproape întotdeauna îndeplinită condiția $\frac{h}{b} > 10 \Rightarrow \alpha = \beta = 0,333$, rezultă:

$$I_t = \sum_{i=1}^{n} (I_t)_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot b_i^3.$$



Pentru determinarea tensiunilor tangențiale în secțiune este necesară cunoaşterea momentelor de torsiune preluate de fiecare dreptunghi component ($M_{t\ i}$), plecând de la momentul de torsiune total inițial M_t ce acționează pe secțiune, putând scrie:

$$M_{t1} + M_{t2} + M_{t3} = M_t.$$

Deoarece întreaga secțiune se roteşte ca un disc rigid, unghiul de torsiune specific al întregii secțiuni este acelaşi cu cel al fiecărui dreptunghi component, astfel:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_i = \theta;$$

$$\theta_i = \frac{M_{ti}}{GI_{ti}}, \quad \theta = \frac{M_t}{GI_t};$$

rezultă:

$$\frac{M_{ti}}{I_{ti}} = \frac{M_t}{I_t}, \Rightarrow M_{ti} = \frac{M_t}{I_t} I_{ti}.$$

Tensiunea tangențială maximă pentru dreptunghiul i va fi de forma:

$$\tau_{max\,i} = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = \frac{M_t}{I_t}\frac{I_{ti}}{W_{ti}},$$

$$I_{ti} = \frac{1}{3} h_i b_i^3; \quad W_{ti} = \frac{1}{3} h_i b_i^2 \Rightarrow$$

$$\frac{I_{ti}}{W_{ti}} = b_i, \quad \tau_{max\,i} = \frac{M_t}{I_t} b_i,$$

iar tensiunea maximă pentru întreaga secțiune:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} b_{max},$$

valoare obținută la jumătatea dreptunghiului component de grosime maximă.
Obs.

În legătură cu algoritmul aproximativ prezentat mai sus, experimentele pot demonstra o rigiditate a barelor cu pereți subțiri cu profil deschis, mai mare decât cea dată de formule. Acest fapt se poate explica prin luarea în considerare, în formule, a lucrului independent al fiecărui dreptunghi component, fără a se ține seama că porțiunile sunt prinse rigid între ele. Se recomandă în acest sens corectarea momentului de inerție la torsiune dat de relațiile de mai sus prin înmulțirea cu un factor η ce ține seama de forma profilului, astfel:

- pentru profil cornier L, $\eta = 1$;
- pentru profil U, $\eta = 1{,}1 \div 1{,}2$;
- pentru profil I, $\eta = 1{,}3$.

La racordările dintre elementele unui profil apar concentrări de tensiune care pot duce la valori ale tensiunilor tangențiale superioare celor maxim determinate cu ajutorul relațiilor precedente. Astfel, în zona racordărilor, tensiunile tangențiale se calculează cu ajutorul relațiilor:

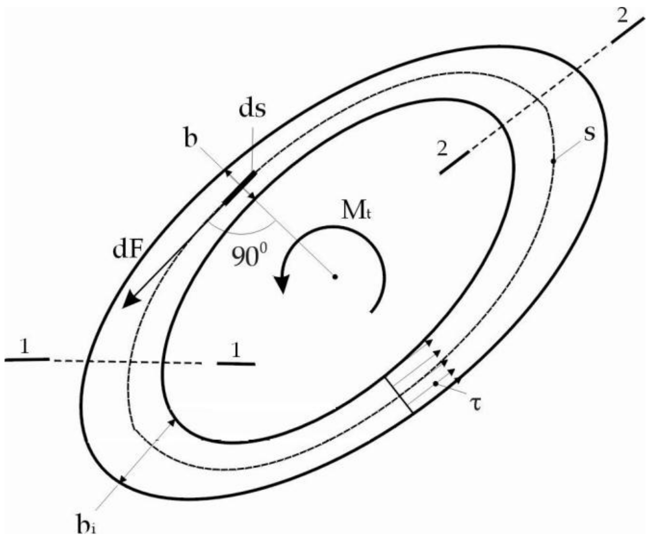
$$\tau_{max\,k} = \alpha_k \cdot \tau_{max};$$

$$\alpha_k = 1{,}74 \sqrt[3]{\frac{b}{r}},$$

în care b – grosimea profilului la racordare, r – raza de racordare.

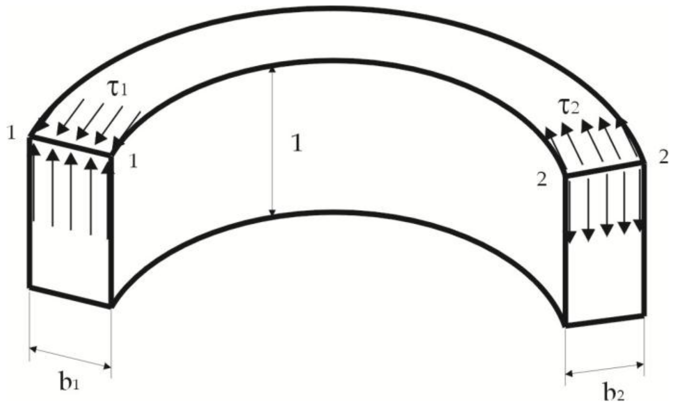
Profil închis (formulele lui Bredt)

Pentru secțiunile tip profil închis cu pereți subțiri (vezi figura de mai jos), se vor da câteva rezultate ale soluției în cazul deplanărilor libere (răsucire neîmpiedicată), pentru situația în care $\frac{s}{b_i} \geq 8 \div 10$, cu s – lungimea conturului median al secțiunii şi b_i – grosimea peretelui în punctul „i" al acesteia.



Tensiunile tangențiale τ sunt tangente la contur şi datorită grosimii reduse pot fi considerate constante pe grosimea b a conturului.

Se secționează transversal în 1-1 şi 2-2 (vezi figura de mai sus) şi se decupează din tub un tronson delimitat de două secțiuni transversale situate la o distanță egală cu unitatea şi de două plane paralele cu axa tubului (vezi figura de mai jos).

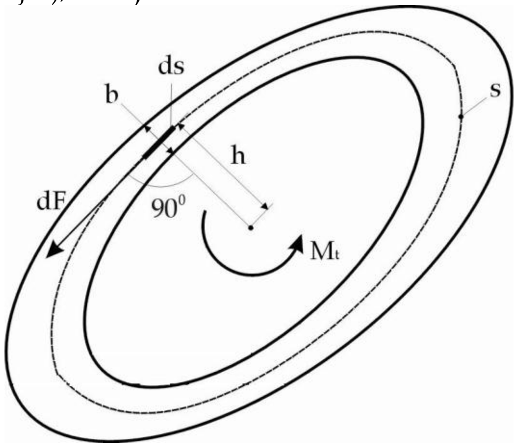


Pe muchia 1-1, de lățime b_1, tensiunile tangențiale sunt τ_1, pe 2-2, de lățime b_2, tensiunile tangențiale sunt τ_2. Tensiunile τ_1 şi τ_2 sunt uniform distribuite pe grosimile b_1 şi b_2. Pe fețele longitudinale se dezvoltă tensiuni tangențiale care respectă legea dualității tensiunilor tangențiale (de valori tot τ_1 şi τ_2); din ecuația de proiecții pe direcția axei longitudinale a tubului, rezultă:

$$\tau_1 \cdot b_1 = \tau_2 \cdot b_2 = \tau_i \cdot b_i = \tau \cdot b = \tau_F,$$

în care s-a notat cu τ_F - fluxul tensiunilor tangențiale.

Prin scrierea relației de echivalență dintre momentul de torsiune de la nivelul secțiunii şi momentul forțelor elementare $dF = \tau \cdot b ds$ de pe suprafața secțiunii transversale, în raport cu axa barei (h fiind perpendiculara din O pe dF – vezi figura de mai jos), se obține:



$$M_t = \oint_s (\tau \cdot b ds) h, \quad \tau \cdot b = ct.;$$

$$\oint_s h ds \overset{not.}{=} 2\Omega,$$

unde Ω - aria suprafeței închisă de conturul median al secțiunii.

Cu notația făcută, rezultă:

$$M_t = \tau b 2\Omega;$$

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega b},$$

relație ce reprezintă prima formulă a lui Bredt. Astfel, condiția de rezistență devine:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2\Omega\, b_{min}} \le \tau_a\,,$$

putând fi făcută notația $W_t = 2\Omega\, b_{min}$.

Determinarea unghiului de torsiune se bazează pe legea conservării energiei; se admite că lucrul mecanic exterior produs prin aplicarea cuplului de torsiune M_t pe elementul considerat se transformă integral în energie potențială de deformație (lucrul mecanic exterior este egal cu semiprodusul dintre sarcină şi deplasare, iar energia de deformație se determină cu relația corespunzătoare stării de forfecare pură), astfel:

$$M_t \cdot \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2G}\int_V \tau^2 dV,$$

unde $dV = b \cdot ds \cdot dx$ - elementul de volum V, cu dx elementul de lungime a tubului (barei) în discuție.

Prin utilizarea primei relații a lui Bredt,

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega b}\,,$$

se ajunge la expresia unghiului de torsiune elementar, în forma:

$$\cancel{M_t}\,\frac{d\varphi}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}G}\int \frac{M_t^{\cancel{2}}}{4\Omega^2 b^{\cancel{2}}}\,\cancel{b}\, ds\, dx;$$

$$d\varphi = \frac{M_t\, dx}{4\Omega^2 G}\oint \frac{ds}{b},$$

precum şi expresia unghiului de torsiune specific:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{4\Omega^2 G}\oint \frac{ds}{b} \quad \text{sau}$$

$$\left(\theta = \frac{1}{2\Omega G}\int \tau\, ds\right),$$

$$\theta = \frac{M}{G I_t}; \quad I_t = \frac{4\Omega^2}{\oint_s \frac{ds}{b}},$$

pentru tuburi cu pereți de grosime constantă:

$$\oint_s \frac{ds}{b} = \frac{s}{b},$$

$$\theta = \frac{M_t\, s}{4b\Omega^2 G}.$$