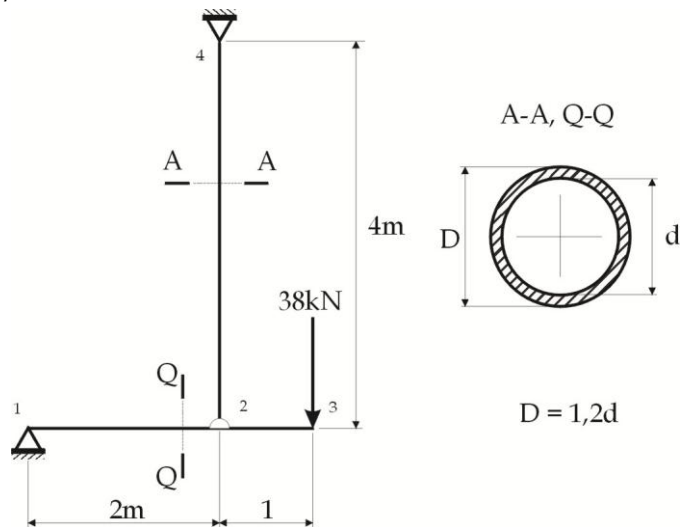


Exemple de aplicare a formulei Maxwell - Mohr prin regula Vereșceaghin

1. Pentru sistemul de bare static determinat, încărcat în planul său, din figura de mai jos se cer: a) dimensionarea barelor componente - materialul utilizat are $\sigma_a = 160\text{N/mm}^2$, forma secțiunii barelor fiind conform figurii; b) proiecția deplasării pe verticală a secțiunii 3 (punctul de aplicație a sarcinii utile de 38 kN) - $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{N/mm}^2$.



a) Pentru a se afla tipul de solicitare la care este supus fiecare tronson al sistemului de bare se calculează reacțiunile sistemului și se trasează diagramele de efort secțional, astfel:

$$\sum M_2^{2-4} = 0 \Rightarrow H_4 = 0;$$

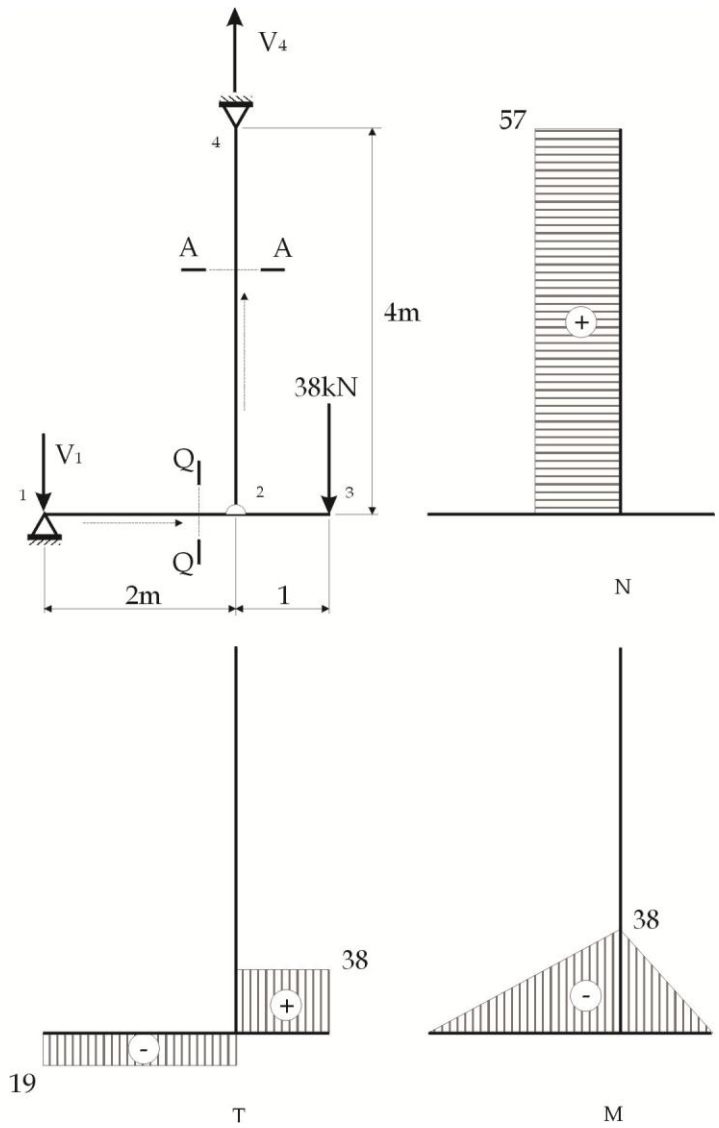
$$\sum X = 0 \Rightarrow H_1 = 0;$$

$$\sum M_1 = 0, \quad V_4 \cdot 2 - 38 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_4 = 57\text{kN};$$

$$\sum M_2^{1-3} = 0, \quad V_1 \cdot 2 - 38 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 19\text{kN},$$

verificare

$$\sum Y = 0, \quad 19 - 57 + 38 = 0.$$



În concluzie, tronsonul 2-4 (tirant) lucrează la întindere, iar bara 1-3 (grindă) este sollicitată la încovoiere simplă. Se dimensionează cele două tronsoane ale sistemului, astfel:

- dimensionare din solicitarea de întindere simplă,

$$A_{\text{nec}}^{2-4} = \frac{N_{2-4}}{\sigma_a} = \frac{57 \cdot 10^3}{160} = 3,563 \cdot 10^2 \text{ mm}^2,$$

$$A_{\text{ef}} = \frac{\pi}{4} (D_{2-4}^2 - d_{2-4}^2) = \frac{\pi}{4} [(1,2d_{2-4})^2 - d_{2-4}^2] = 0,346 d_{2-4}^2,$$

$$d_{2-4_{\text{nec}}} = \sqrt{\frac{3,563 \cdot 10^2}{0,346}} = 32,09 \text{ mm},$$

$$D_{2-4_{\text{nec}}} = 1,2 \cdot 32,09 = 38,51 \text{ mm};$$

se aleg :

$$D_{2-4} = 40 \text{ mm}, \quad d_{2-4} = 32 \text{ mm},$$

- dimensionare din solicitarea de încovoiere simplă,

$$W_{\text{nec}}^{1-3} = \frac{M_{\text{max}_{1-3}}}{\sigma_a} = \frac{38 \cdot 10^6}{160} = 2,38 \cdot 10^5 \text{ mm}^3,$$

$$W_{\text{ef}} = \frac{\pi}{32 D_{1-3}} (D_{1-3}^4 - d_{1-3}^4) = \frac{\pi}{32 (1,2 d_{1-3})} [(1,2 d_{1-3})^4 - d_{1-3}^4] = 8,783 \cdot 10^{-2} d_{1-3}^3,$$

$$d_{1-3_{\text{nec}}} = \sqrt[3]{\frac{2,38 \cdot 10^5}{8,783 \cdot 10^{-2}}} = 139,42 \text{ mm},$$

$$D_{1-3_{\text{nec}}} = 1,2 \cdot 139,42 = 167,3 \text{ mm};$$

se aleg :

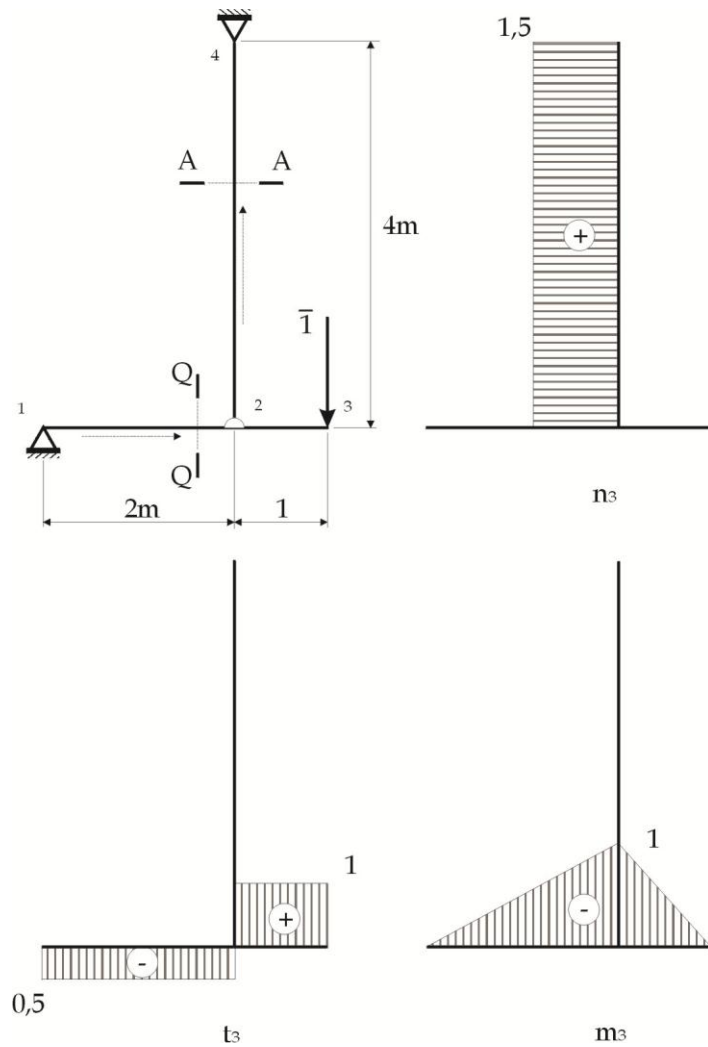
$$D_{1-3} = 168 \text{ mm}, \quad d_{1-3} = 138 \text{ mm}.$$

b) Pentru determinarea proiecției pe verticală a deplasării secțiunii 3, se încarcă sistemul inițial de bare cu o sarcină virtuală unitară, de natura și pe direcția deplasării căutate (o forță concentrată de sus în jos) și se trasează diagramele de eforturi.

La aplicarea formulei Maxwell - Mohr prin regula Vereșceaghin se vor lua în considerare, pentru fiecare tronson al sistemului în parte, termenii corespunzători solicitărilor; pentru tirantul 2-4 se va lua în considerare termenul din forță axială iar pentru grinda 1-3, termenul din moment încovoiator. Astfel, vor intra în calcul diagramele n_3, m_3, N, M în relația de forma:

$$v_3 = \frac{1}{EA_{2-4}} (n_3, N) + \frac{1}{EI_{1-3}} (m_3, M),$$

în care (n_3, N) reprezintă produsul prin regula Vereșceaghin între diagramele de efort n_1 și N , etc.



Prin înlocuire în relație se obține:

$$v_3 = \frac{1}{EA_{2-4}} (57 \cdot 4 \cdot 1,5) + \frac{1}{EI_{1-3}} \left(\frac{1}{3} 38 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{3} 38 \cdot 1 \cdot 1 \right),$$

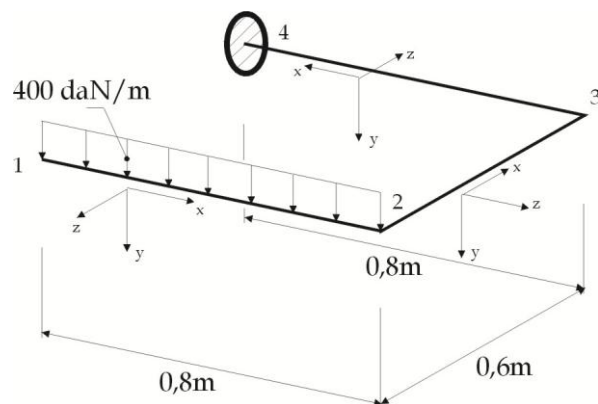
$$v_3 = \frac{342}{EA_{2-4}} + \frac{38}{EI_{1-3}},$$

$$v_3 = \frac{342 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi}{4}(40^2 - 32^2)} + \frac{38 \cdot 10^{12}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi}{64}(168^4 - 138^4)};$$

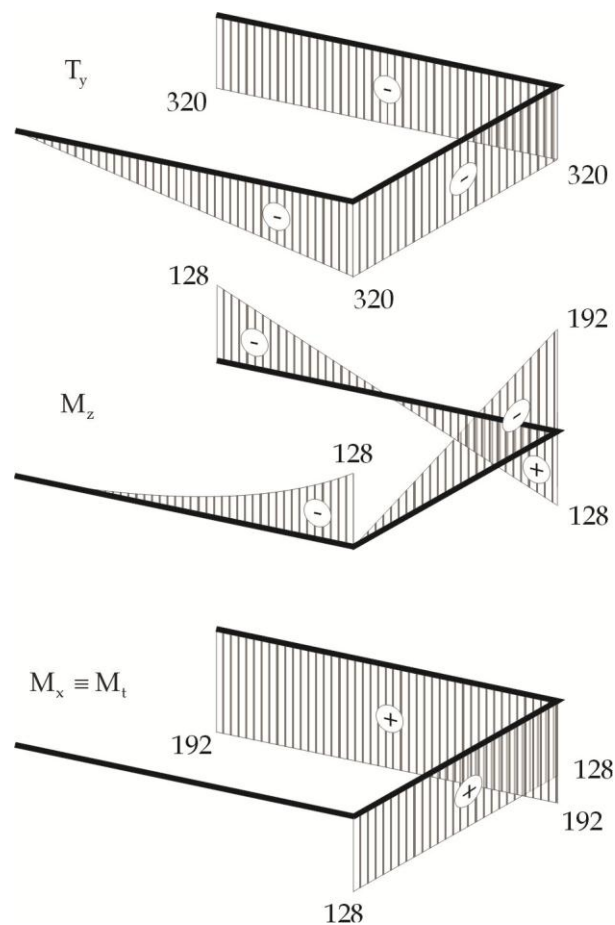
$$v_3 = 3,6 + 8,5 = 12,1 \text{ mm.}$$

Se remarcă aportul semnificativ al termenului din sarcină axială, fapt datorat prezenței tronsonului tirant 2-4 în sistemul de bare studiat.

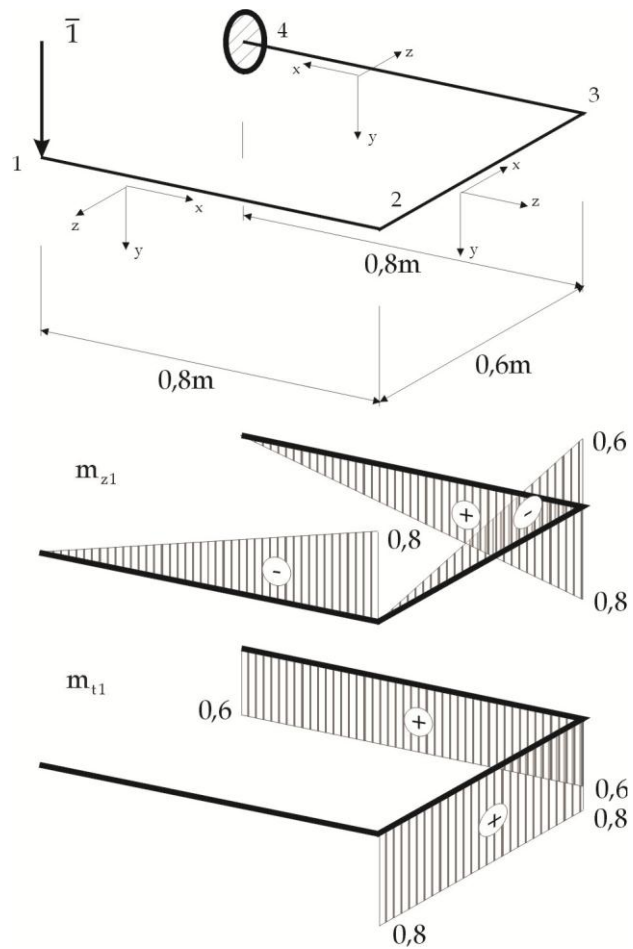
2. Pentru sistemul de bare încărcat normal pe planul său din figura de mai jos, se cere găsirea proiecției pe verticală a deplasării secțiunii 1; sistemul este format din bare de secțiune circulară plină, de diametru $d = 50 \text{ mm}$, materialul utilizat are constantele elastice $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $G = 8,4 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$.



Pentru alegerea corectă a termenilor valabili pentru fiecare tronson al sistemului de bare, termeni din relația Maxwell - Mohr, se trasează diagramele de eforturi pentru sistem; ținându-se seama de triedrul de referință pentru fiecare tronson în parte și de natura schemei de rezemare, din totalul de șase diagrame de efort posibile pentru un sistem spațial, în cazul de față pot fi trasate (există) trei diagrame de efort - forță tăietoare după y , moment încovoietor după z și moment după axa longitudinală x (moment de torsiune). Astfel, se obțin:



Se remarcă tipul solicitării diferitelor tronsoane ale sistemului de bare, astfel tronsonul 1-2 este solicitat la încovoiere simplă, tronsoanele 2-3 și 3-4 lucrând simultan la încovoiere cu torsiune; pentru trasarea diagramelor corespunzătoare deplasării căutate se încarcă, **în exclusivitate**, sistemul de bare inițial cu o forță virtuală unitară pe direcția axei de referință y (verticală), forță ce acționează la nivelul secțiunii de interes (1). Ținându-se seama de termenii ce intră în expresia deplasării finale căutate (termeni din moment încovoiitor și moment de torsiune), se trasează diagramele corespunzătoare, astfel:



Se utilizează formula Maxwell - Mohr, prin regula Vereșceaghin, pentru determinarea deplasării căutate, astfel:

$$v_1 = \frac{1}{EI} (m_{z1}; M_z) + \frac{1}{GI_p} (m_{t1}; M_t),$$

$$v_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} 128 \cdot 0,8 \cdot 0,8 - \frac{2}{3} \frac{400 \cdot 0,8^2}{8} \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} 0,8 + \frac{1}{3} 192 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + \frac{0,8 \cdot 0,8}{2} \left(\frac{2}{3} 128 - \frac{1}{3} 128 \right) \right) + \frac{1}{GI_p} (128 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 192 \cdot 0,6 \cdot 0,8);$$

$$v_1 = \frac{1}{EI} \cdot 57,17 + \frac{1}{GI_p} \cdot 153,6;$$

$$v_1 = \frac{57,17 \cdot 10^{10}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 50^4}{64}} + \frac{153,6 \cdot 10^{10}}{8,4 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 50^4}{32}},$$

$$v_1 = 8,87 + 29,8 = 38,67 \text{ mm.}$$