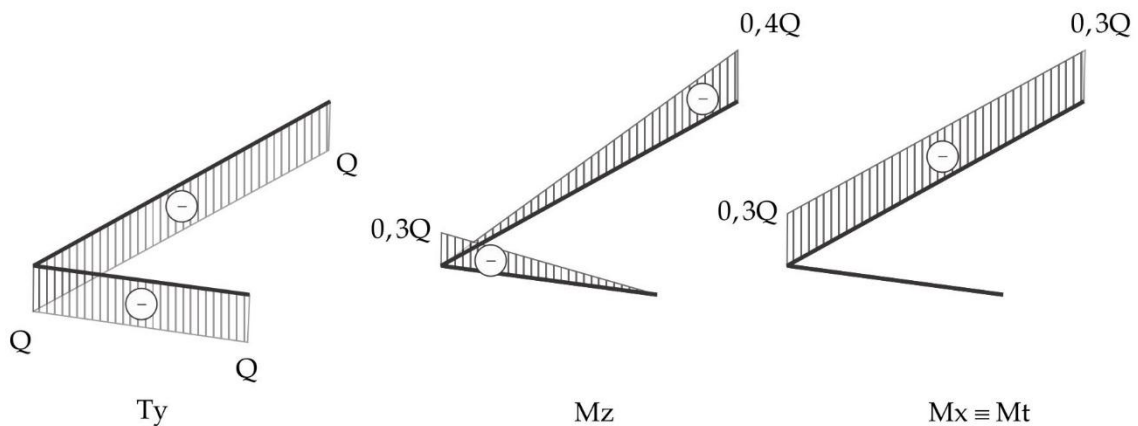
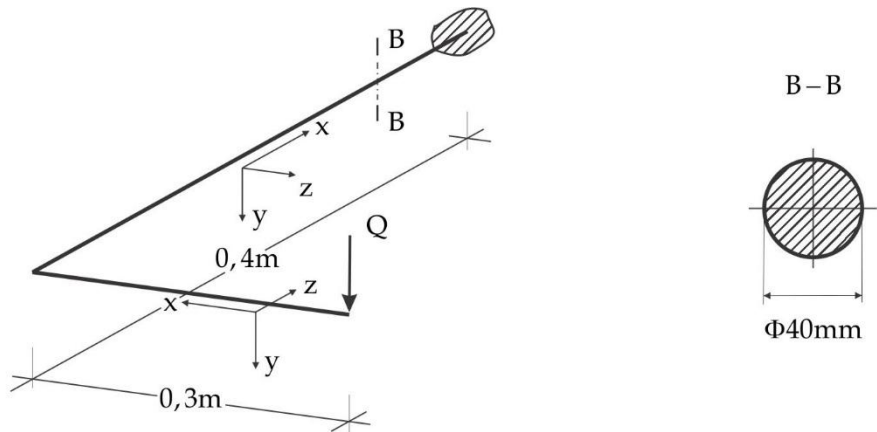


Teorii de rezistență. Încovoiere cu torsiune

1. Pentru sistemul de bare încărcat ca în figura de mai jos se cere determinarea sarcinii $Q_{cap.}$; se cunoaște $\sigma_a = 80\text{N/mm}^2$, se va utiliza teoria III de rezistență, T_{III} (criteriul Tresca, Int. Stress Intensity $[P_1 - P_3]$).

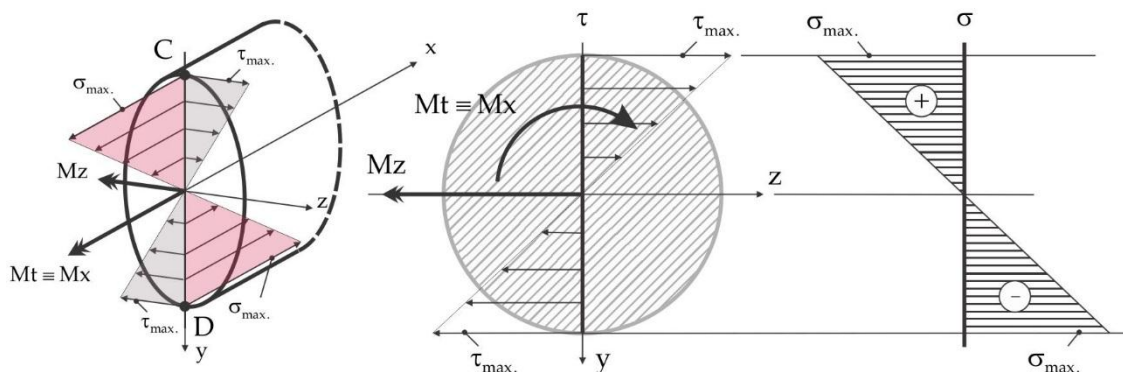


După trasarea diagramelor de efort (sistem de bare încărcat perpendicular pe planul său), se constată drept secțiune periculoasă reazemul încastat, astfel:

$$M_z = 0,4Q[\text{kNm}](-);$$

$$M_x = M_t = 0,3Q[\text{kNm}](-),$$

cu unitățile de măsură judicios alese, se figurează pe secțiune eforturile și se stabilește punctul periculos al secțiunii:



Datorită naturii diferite a celor două eforturi unitare maxime ($\sigma_{\max.}, \tau_{\max.}$ nu pot fi sumate algebric, având direcții ortogonale), calculul se va continua prin exprimarea tensiunii normale echivalente la nivelul punctului periculos - extremitatea superioară sau inferioară a secțiunii, punctele C sau D - tensiune echivalentă exprimată cu ajutorul uneia dintre teoriile (criteriile) de rezistență studiate. Conform datelor inițiale ale problemei, în cazul de față se va utiliza criteriul Tresca, astfel:

$$M_{i_{ech.}}^{\max.} = \sqrt{Mz^2 + Mt^2} \Rightarrow M_{i_{ech.}}^{\max.} = \sqrt{(0,4Q)^2 + (0,3Q)^2} = 0,5Q[\text{kNm}],$$

calculul fiind făcut în continuare cu relațiile și algoritmi valabili pentru solicitarea de încovoiere simplă, având drept moment încovoiitor valoarea dată de teoria de rezistență - $M_{i_{ech.}}$, astfel:

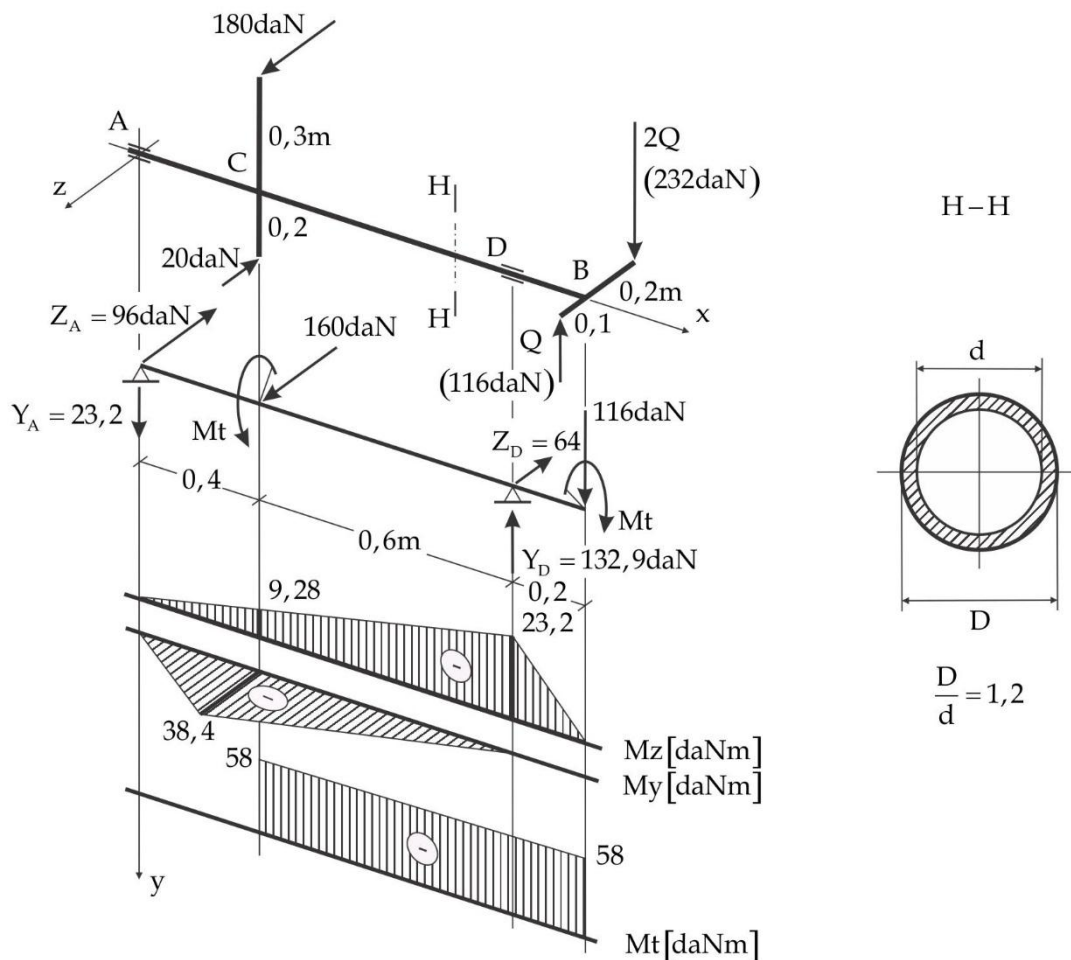
$$\left. \begin{aligned} M_{i_{cap.}} &= W_{ax.} \cdot \sigma_a; \\ W_{ax.} &= \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_{i_{cap.}} = \frac{\pi \cdot 40^3}{32} \cdot 80 = 5,027 \cdot 10^5 \text{ Nmm}.$$

Se echivalează, la limită, momentul încovoiitor capabil al secțiunii - $M_{i_{cap.}}$, cu expresia simbolică a momentului încovoiitor echivalent maxim - $M_{i_{ech.}}^{\max.}$ și se determină parametrul Q dorit:

$$M_{i_{ech.}}^{\max. \text{ lim.}} = M_{i_{cap.}} \Rightarrow 0,5Q \cdot 10^6 = 5,027 \cdot 10^5, \quad Q = 1,0054 \text{ kN},$$

se adoptă $Q_{cap} = 1 \text{ kN}$.

2. Să se calculeze valoarea parametrului Q și să se dimensioneze secțiunea arborelui din figura de mai jos; se va utiliza criteriul de rezistență Tresca, $\sigma_a = 60 \text{ N/mm}^2$.



Se determină valoarea mărimii parametrului Q prin exprimarea echilibrului în termeni de sumă de momente de torsiune în raport cu axa longitudinală (x) a arborelui A-B, astfel:

$$\sum M_t = 0; 180 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,2 - 2Q \cdot 0,2 - Q \cdot 0,1 = 0 \Rightarrow Q = 116 \text{ daN}.$$

Cu schema de încărcare astfel completată, se reduce efectul încărcărilor la nivelul axei longitudinale a arborelui și se trasează diagramele de efort; solicitarea este de încovoiere pe două direcții cu torsiune, existând două așa-zise secțiuni periculoase de interes, $C_{dr.}$ (ipoteza de lucru $M_{y_{max.}}$), respectiv D (ipoteza de lucru $M_{z_{max.}}$). Pentru acest caz de solicitare compusă, criteriul de rezistență Tresca are relația generică de forma:

$$M_{i_{ech.}} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_t^2};$$

prin înlocuire, se obțin valorile:

$$M_{i_{ech.}}^{C_{dr.}} = \sqrt{9,28^2 + 38,4^2 + 58^2} \Rightarrow M_{i_{ech.}}^{C_{dr.}} = 70,18 \text{ daNm};$$

$$M_{i_{ech.}}^D = \sqrt{23,2^2 + 58^2} \Rightarrow M_{i_{ech.}}^D = 62,47 \text{ daNm}.$$

Se dimensionează arborele la valoarea maximă a momentului încovoiator echivalent (cazul cel mai defavorabil), fiind utilizate relațiile specifice solicitării de încovoiere simplă:

$$W_{ax_{nec.}} = \frac{M_{i_{ech.}}}{\sigma_a} \Rightarrow W_{ax_{nec.}} = \frac{70,18 \cdot 10^4}{60} = 1,17 \cdot 10^4 \text{ mm}^3;$$

$$\left. \begin{aligned} W_{ax_{ef.}} &= \frac{I_{ax_{ef.}}}{r_{max.}}; \\ I_{ax_{ef.}} &= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4), \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_{ax_{ef.}} = \frac{\pi}{32D} (D^4 - d^4); \left. \begin{aligned} D &= 1,2d, \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_{ax_{ef.}} = \frac{\pi}{32(1,2d)} [(1,2d)^4 - d^4],$$

$$W_{ax_{ef.}} = 8,783 \cdot 10^{-2} d^3.$$

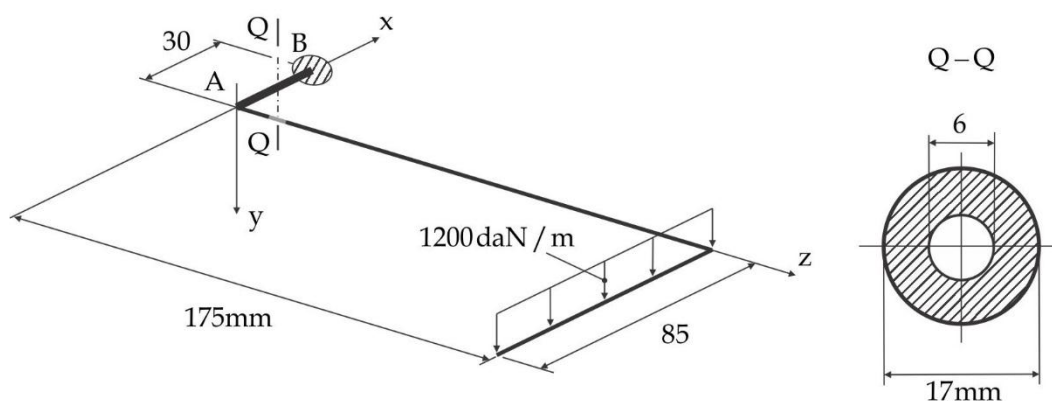
Se egalează, la limită, expresiile modulelor de rezistență axiale, cel efectiv (formă literală sau simbolică), cu cel necesar (valoare) și se obține:

$$8,783 \cdot 10^{-2} d^3 = 1,17 \cdot 10^4; d_{nec.} = \sqrt[3]{\frac{1,17 \cdot 10^4}{8,783 \cdot 10^{-2}}} \Rightarrow d_{nec.} = 51,07 \text{ mm};$$

$$D_{nec.} = 1,2 \cdot d_{nec.}; D_{nec.} = 1,2 \cdot 51,07 \Rightarrow D_{nec.} = 61,28 \text{ mm},$$

se adoptă $D_{ef.} = 62 \text{ mm}$, $d_{ef.} = 50 \text{ mm}$.

T1. Să se verifice secțiunea de formă tubulară a arborelui A-B din figura de mai jos; material oțel înalt aliat, $\sigma_a = 420 \text{ N/mm}^2$.



Se reduce efectul schemei de încărcare la nivelul secțiunii periculoase a arborelui A-B (încastrarea B), astfel:

$$M_i = M_z = 1200 \cdot 85 \cdot 10^{-3} \left(\frac{85 \cdot 10^{-3}}{2} + 30 \cdot 10^{-3} \right) \Rightarrow M_i = 7,4 \text{ daNm};$$

$$M_t = M_x = 1200 \cdot 85 \cdot 10^{-3} \cdot 175 \cdot 10^{-3} \Rightarrow M_t = 17,85 \text{ daNm.}$$

Conform teoriei III de rezistență (criteriul Tresca), în secțiunea periculoasă B se obține o valoare a momentului încovoielor echivalent de:

$$M_{\text{ech.}}^B = \sqrt{7,4^2 + 17,85^2} \Rightarrow M_{\text{ech.}}^B = 19,32 \text{ daNm.}$$

Momentul de inerție axial al secțiunii este:

$$I_{\text{ax. ef.}} = \frac{\pi}{64} (17^4 - 6^4) \Rightarrow I_{\text{ax. ef.}} = 4,036 \cdot 10^3 \text{ mm}^4,$$

iar modulul de rezistență axial corespunzător:

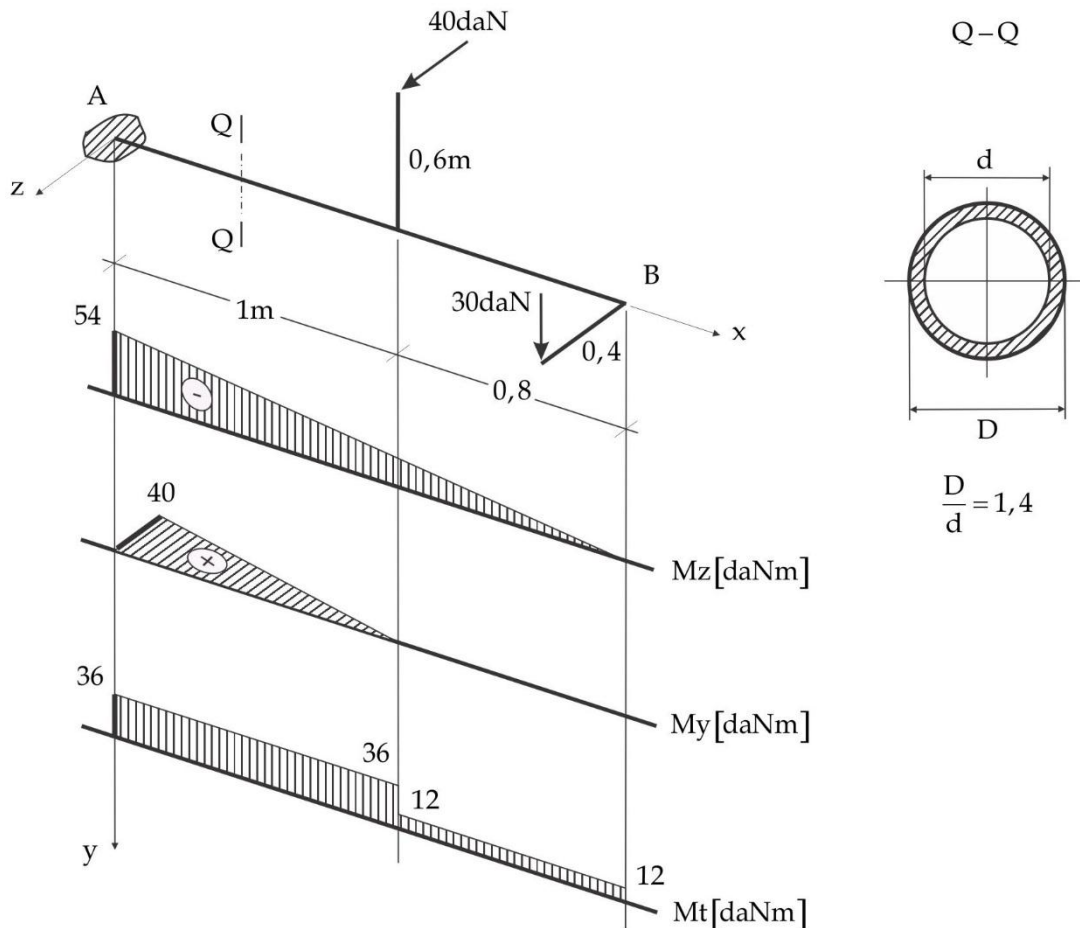
$$\left(W_{\text{ax. ef.}} = \frac{I_{\text{ax. ef.}}}{r_{\text{max.}}} \right), W_{\text{ax. ef.}} = \frac{4,036 \cdot 10^3}{\frac{17}{2}} \Rightarrow W_{\text{ax. ef.}} = 474,82 \text{ mm}^3.$$

Se face verificarea propriu-zisă, utilizându-se relațiile de la încovoiere simplă, astfel:

$$\left(\sigma_{\text{ef.}} = \frac{M_{\text{ech.}}}{W_{\text{ax. ef.}}} \right), \sigma_{\text{ef.}} = \frac{19,32 \cdot 10^4}{474,82} \Rightarrow \sigma_{\text{ef.}} = 406,89 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 420 \text{ N/mm}^2,$$

în concluzie, arborele rezistă.

T2. Să se dimensioneze arborele A-B solicitat ca în figura de mai jos; se cunoaște $\sigma_a = 80 \text{ N/mm}^2$, se va utiliza teoria III de rezistență (criteriul Tresca).



Se trasează diagramele de efort și se calculează, conform teoriei III de rezistență, momentul încovoielor echivalent la nivelul secțiunii periculoase (încăstrarea A), astfel:

$$M_{\text{ech.}}^A = \sqrt{54^2 + 40^2 + 36^2} \Rightarrow M_{\text{ech.}}^A = 76,24 \text{ daNm.}$$

Se face dimensionarea ca la solicitarea de încovoiere simplă, utilizându-se valoarea momentului încovoiitor echivalent:

$$\left(W_{ax_{nec.}} = \frac{M_{i_{ech.}}}{\sigma_a} \right), W_{ax_{nec.}} = \frac{76,24 \cdot 10^4}{80} \Rightarrow W_{ax_{nec.}} = 9,53 \cdot 10^3 \text{ mm}^3;$$

$$I_{ax_{ef.}} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4), W_{ax_{ef.}} = \frac{\pi}{32D}(D^4 - d^4) \stackrel{D=1,4d}{\Rightarrow} W_{ax_{ef.}} = \frac{\pi}{32(1,4d)}[(1,4d)^4 - d^4], W_{ax_{ef.}} = 0,2d^3;$$

$$W_{ax_{ef.}} \stackrel{\text{lim.}}{=} W_{ax_{nec.}}, 0,2d^3 = 9,53 \cdot 10^3 \Rightarrow d_{nec.} = \sqrt[3]{\frac{9,53 \cdot 10^3}{0,2}} = 36,25 \text{ mm};$$

$$(D_{nec.} = d_{nec.} \cdot 1,4), D_{nec.} = 36,25 \cdot 1,4 \Rightarrow D_{nec.} = 50,76 \text{ mm},$$

se adoptă: $D_{ef.} = 52 \text{ mm}$, $d_{ef.} = 36 \text{ mm}$.