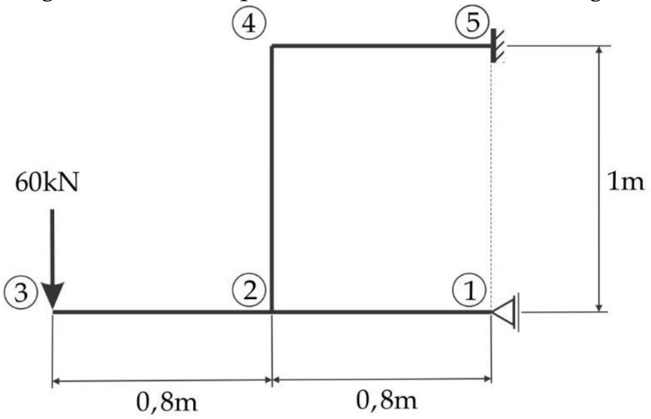
seminar 12

Sisteme static nedeterminate. Metoda eforturilor

1. Să se traseze diagramele de efort pentru sistemul de bare din figura de mai jos (EI=ct.).

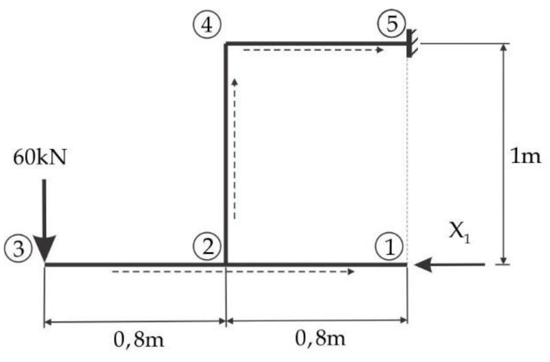


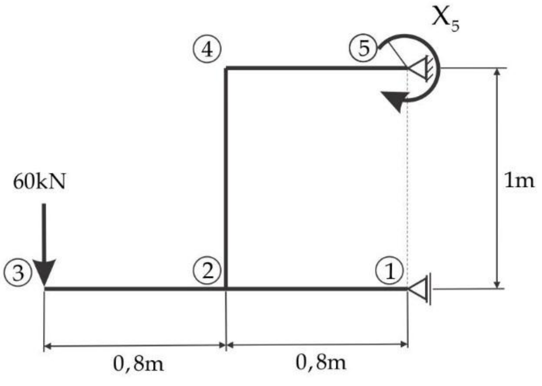
Obs. Algoritmul de rezolvare prezentat în cele ce urmează este universal valabil în ceea ce privește pașii de parcurs (inclusiv ordinea acestora).

- Se stabilește gradul de nedeterminare al structurii - n (se utilizează diverse metode funcție de gradul de dificultate al problemei); în cazul de față, din numărul total de necunoscute se scade numărul de ecuații de echilibru ce pot fi exprimate pentru corpul în discuție, astfel:

$$n = (3+1) - 3 \Rightarrow n = 1.$$

- Prin modificarea schemei de rezemare a sistemului inițial de bare, se alege **forma de bază** a problemei; f.b. (forma de bază) reprezintă un sistem static determinat la care s-au pus în evidență **un număr de n necunoscute** ce urmează a fi stabilite. Se alege modificarea reazemului simplu 1, în sensul înlocuirii acestuia cu necunoscuta X_1 corespunzătoare forței de legătură introduse (reacțiune pe direcție orizontală). O altă variantă ar implica modificarea încastrării 5 în articulație, suplimentând schema cu necunoscuta X de tipul unui moment concentrat, variantă mai dificilă din punct de vedere al calculului.



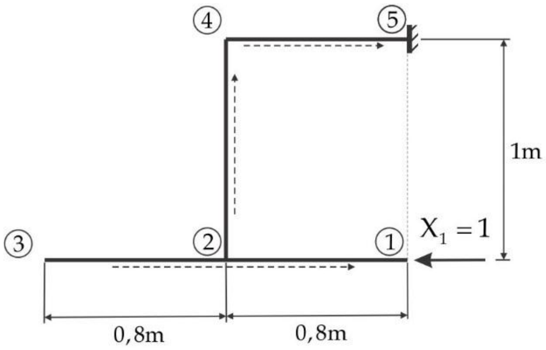


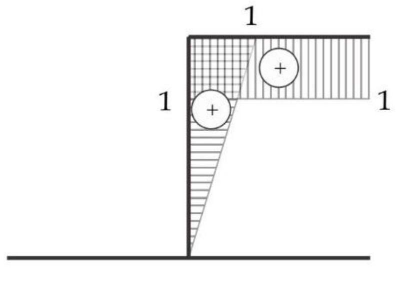
- Se pune condiția ca forma de bază, încărcată simultan cu sarcini inițiale și necunoscute, să se comporte identic cu sistemul inițial – se scrie sistemul de ecuații de continuitate, ecuații exprimate în formă canonică; sistemul astfel exprimat va fi de n ecuații cu n necunoscute. În cazul de față, sistemul de ecuații de continuitate va degenera într-o singură ecuație cu o necunoscută (sistemul este o dată static nedeterminat, $n = 1$), astfel:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0.$$

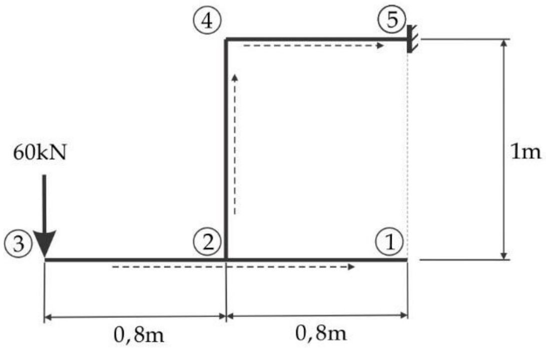
- Se trasează diagramele de efort corespunzătoare și se determină termenii caracteristici ai ecuației utilizând (în cazul de față), formalismul Maxwell-Mohr/Veresceaghin, pentru diagrame de moment încovoietor:

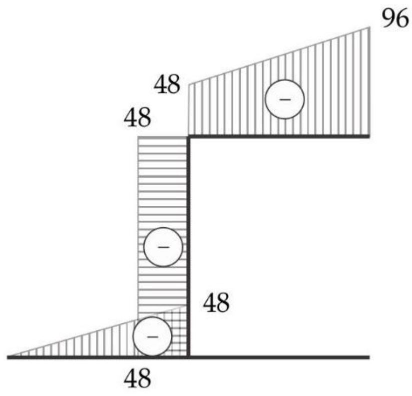
$$EI \cdot \delta_{11} = [m_1;\ m_1];$$
$$EI \cdot \Delta_{10} = [m_1;\ M_0],$$





$m_1\,[m]$





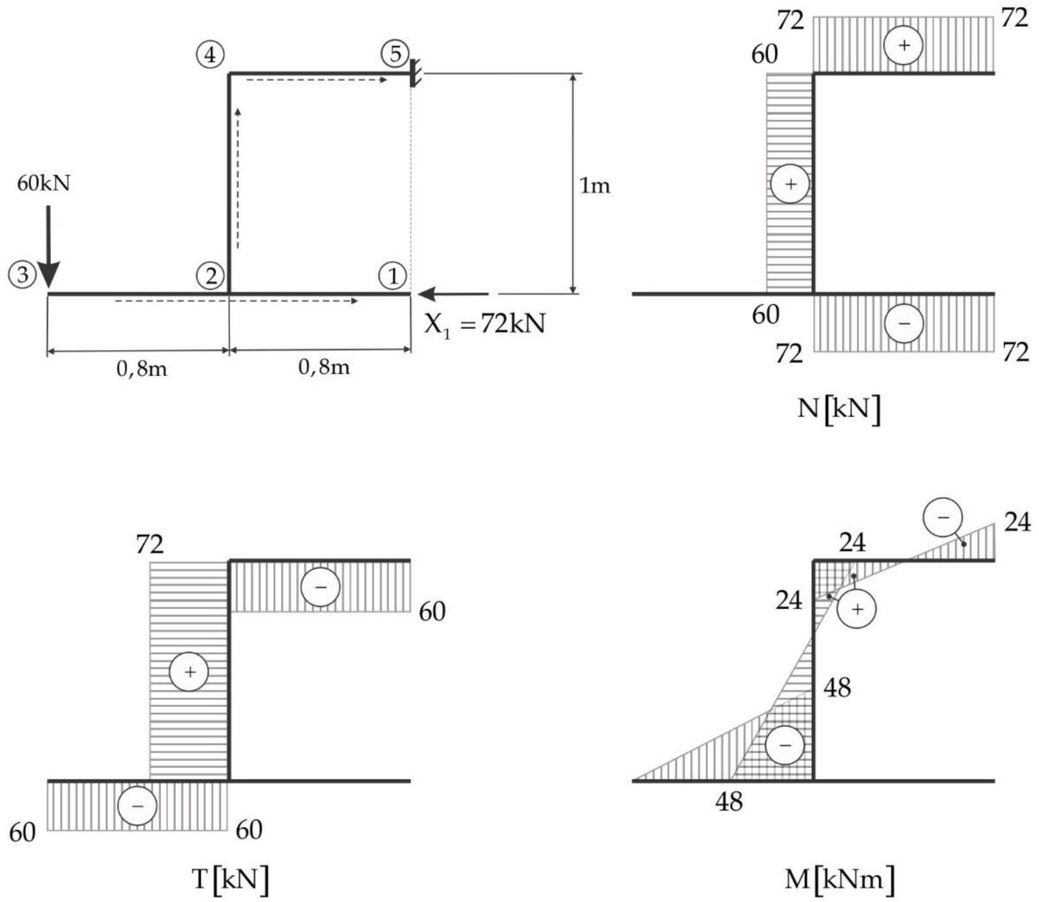
$M_0\,[kNm]$

$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} 1 + 1 \cdot 0,8 \cdot 1 \Rightarrow EI \cdot \delta_{11} = 1,133\,m^3;$$
$$EI \cdot \Delta_{10} = -48 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{(48+96) \cdot 0,8}{2} \cdot 1 \Rightarrow EI \cdot \Delta_{10} = -81,6\,kNm^3.$$

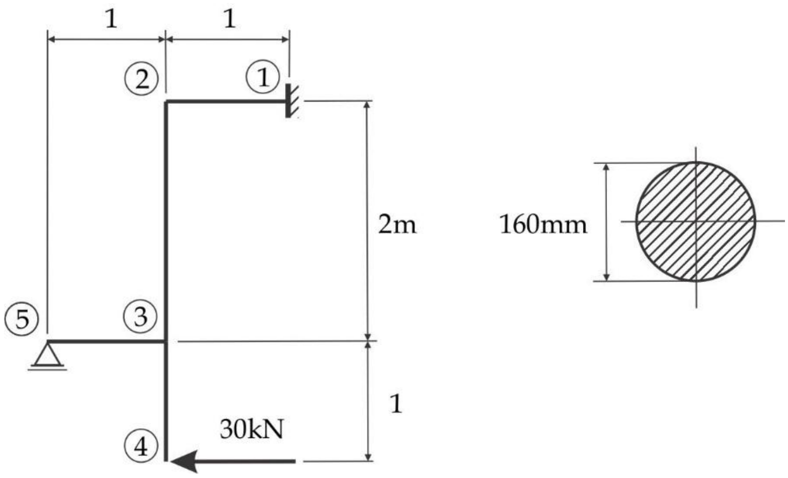
- Se rezolvă sistemul de ecuatii de continuitate (ecuatia, in cazul nostru) si se află cele n necunoscute (una singură, în cazul nostru), astfel:

$$(\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0);$$
$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \Rightarrow X_1 = -\frac{(-81,6kNm^3)}{1,133m^3} = 72kN.$$

- Se încarcă (simultan), forma de bază cu sarcini inițiale și necunoscutele aflate și se trasează diagramele de efort finale:



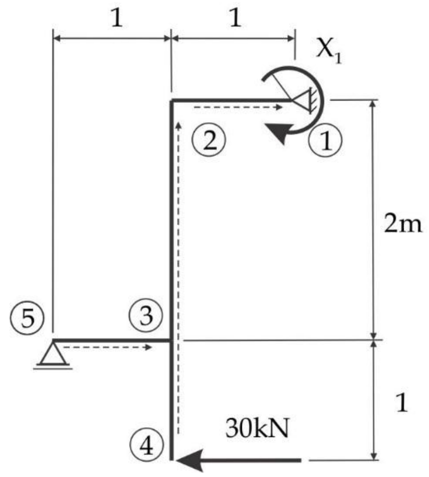
2. Să se stabilească valoarea proiectiei deplasării pe orizontală a sectiunii 5; se consideră rigiditatea la încovoiere $EI = ct.$, $E = 2{,}1 \cdot 10^5 N/mm^2$.



Se calculează gradul de nedeterminare al sistemului:

$$n = (3+1) - 3 \Rightarrow n = 1.$$

Se alege forma de bază a problemei; deși nu constituie varianta cea mai facilă de abordare, se alege în cazul de față alterarea reazemului încastrat 1 (încastrarea se reprezintă drept o articulație plus un moment încovoietor concentrat, necunoscuta de aflat).

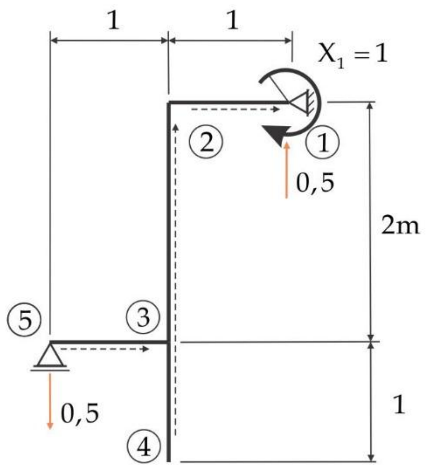


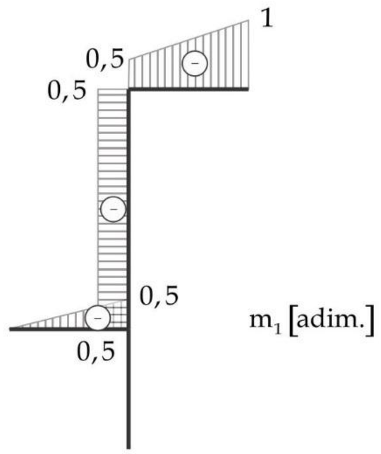
Se scrie ecuația de continuitate, se trasează diagramele de efort necesare și se stabilesc termenii caracteristici în vederea determinării necunoscutei X_1:

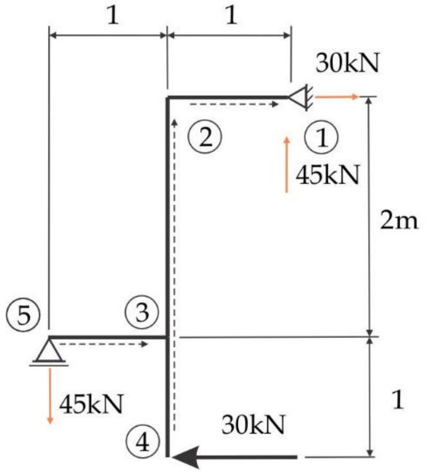
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0;$$

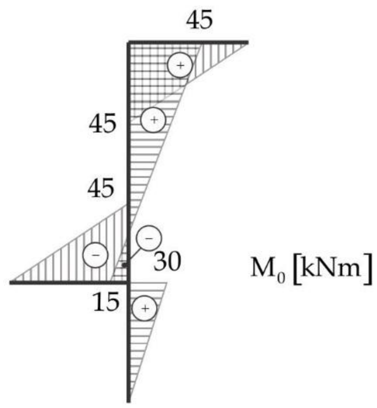
$$EI \cdot \delta_{11} = [m_1;\ m_1];$$

$$EI \cdot \Delta_{10} = [m_1;\ M_0],$$









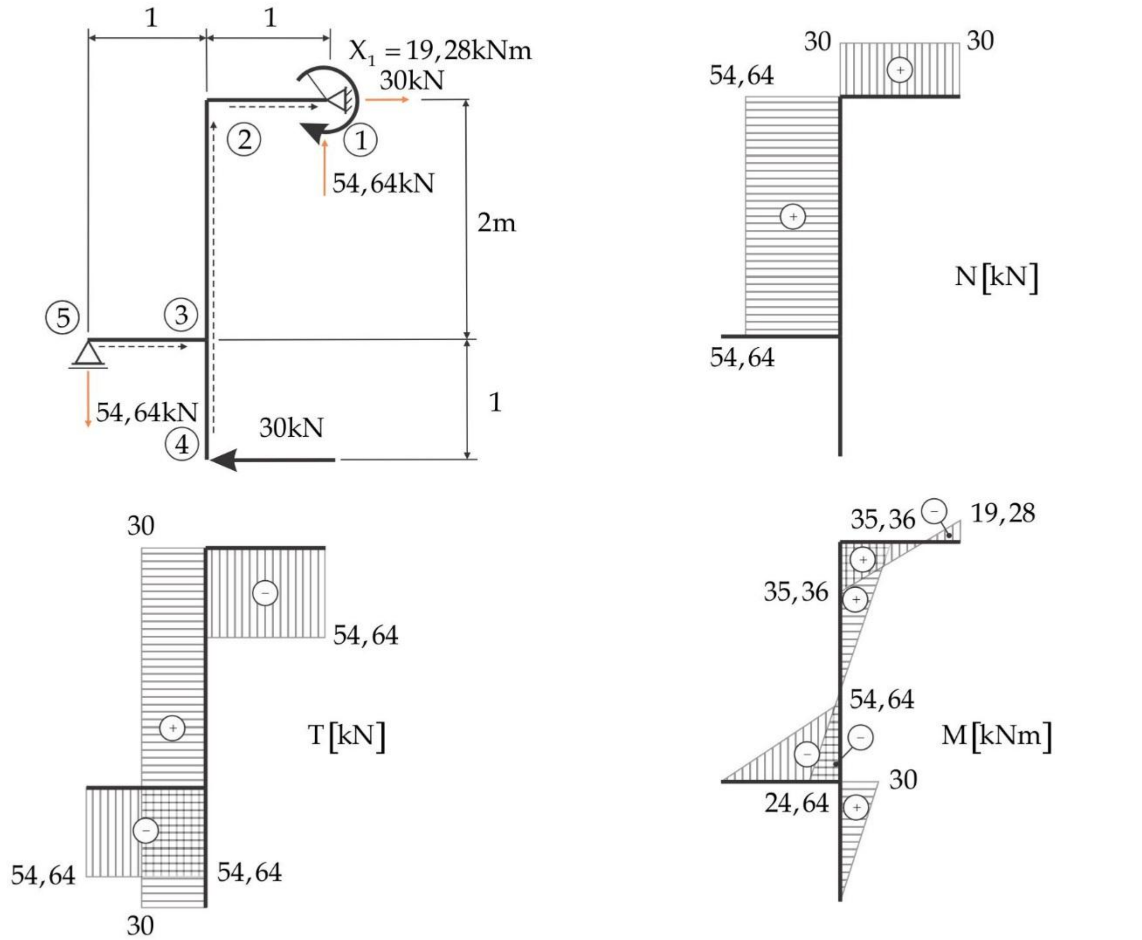
$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{0,5 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} 0,5 + 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 1 \cdot 0,75 + \frac{0,5 \cdot 1}{2}\left(0,5 + \frac{2}{3} 0,5\right) \Rightarrow EI \cdot \delta_{11} = 1,167\,\text{m};$$

$$EI \cdot \Delta_{10} = \frac{0,5 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} 45 - 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}(45 - 15) - \frac{45 \cdot 1}{2}\left(0,5 + \frac{1}{3} 0,5\right) \Rightarrow EI \cdot \Delta_{10} = -22,5\,\text{kNm}^2.$$

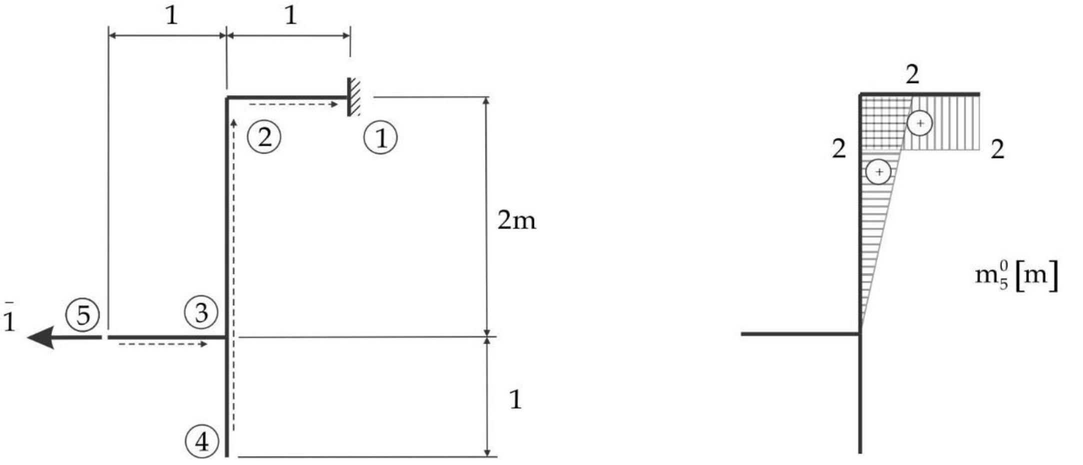
Se găsește valoarea necunoscutei dorite și se trasează diagramele de efort finale, forma de bază fiind încărcată simultan cu schema inițială de încărcare si necunoscuta aflată:

$$(\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0);$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \Rightarrow X_1 = -\frac{(-22,5\text{kNm}^2)}{1,167\text{m}} = 19,28\text{kNm},$$



Pentru stabilirea valorii proiectiei deplasării pe orizontală a sectiunii 5, se încarcă forma de bază, <u>în exclusivitate</u>, cu o sarcină virtuală unitară orizontală (forță) în secțiunea de interes, astfel:



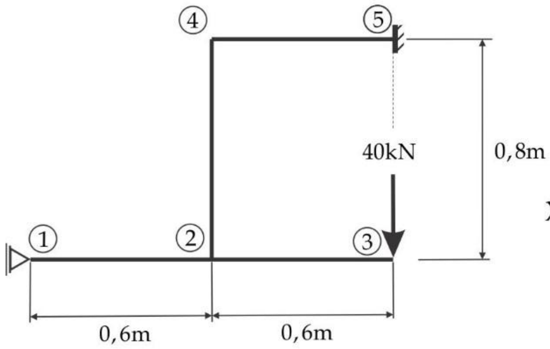
Obs. De remarcat faptul că pentru trasarea diagramei m_5^0 a fost utilizată cealaltă formă de bază posibilă, varianta cea mai simplă din punct de vedere al calculului.

Se calculează deplasarea dorită:

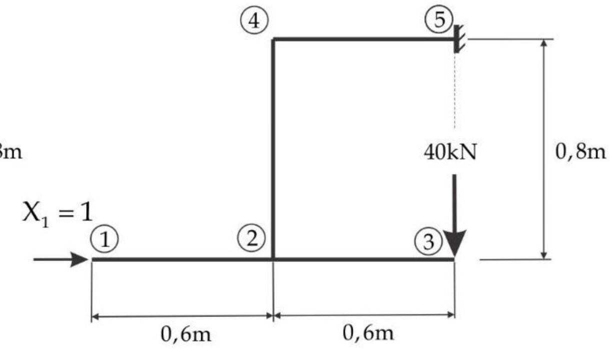
$$EI \cdot u_5 = \frac{2 \cdot 2}{2}\left(\frac{2}{3}35,36 - \frac{1}{3}24,64\right) + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}(35,36 - 19,28) \Rightarrow EI \cdot u_5 = 46,8\,kNm^3;$$

$$u_5 = \frac{46,8 \cdot 10^{12}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 160^4}{64}} \Rightarrow u_5 = 6,93mm.$$

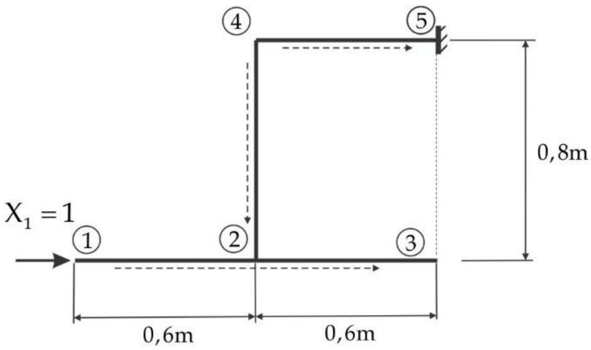
T1. . Să se traseze diagramele de efort pentru sistemul de bare din figura de mai jos (EI=ct.).

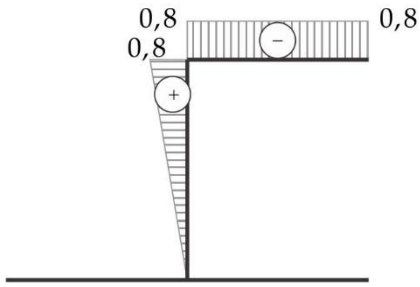


f.b.

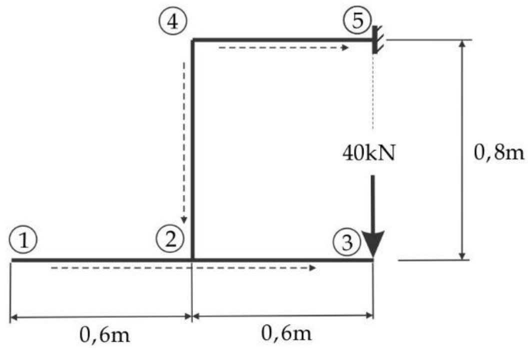


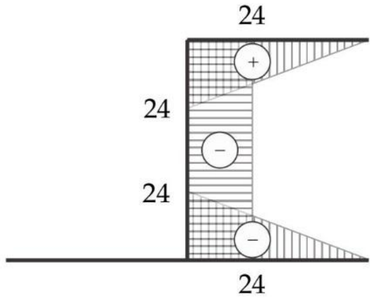
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0.$$





$m_1\,[m]$





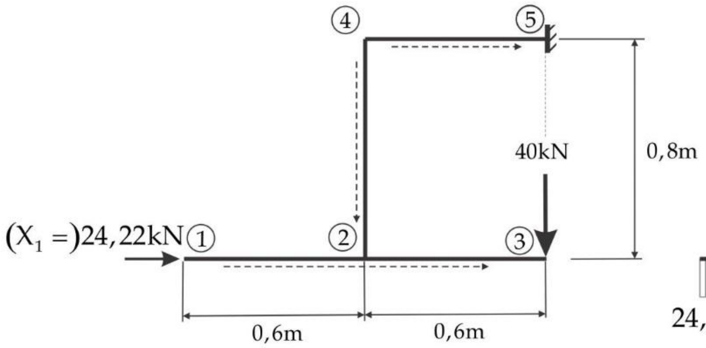
$M_0\,[kNm]$

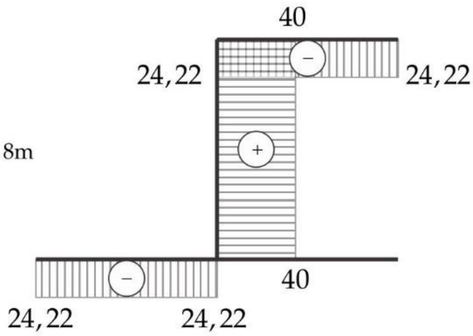
$$EI\cdot\delta_{11}=\frac{0,8\cdot 0,8}{2}\cdot\frac{2}{3}0,8+0,8\cdot 0,6\cdot 0,8\Rightarrow EI\cdot\delta_{11}=0,555\mathrm{m}^3;$$

$$EI\cdot\Delta_{10}=-\frac{0,8\cdot 0,8}{2}\cdot 24-\frac{24\cdot 0,6}{2}\cdot 0,8\Rightarrow EI\cdot\Delta_{10}=-13,44\mathrm{kNm}^3,$$

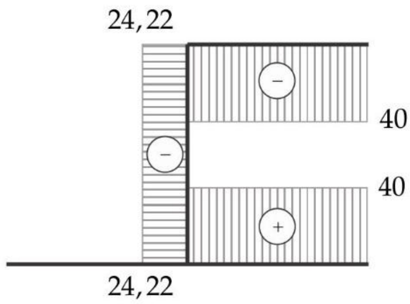
$$\left(\delta_{11}\cdot X_1+\Delta_{10}=0\right);$$

$$X_1=-\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}\Rightarrow X_1=-\frac{\left(-13,44\mathrm{kNm}^3\right)}{0,555\mathrm{m}^3}=24,22\mathrm{kN}.$$

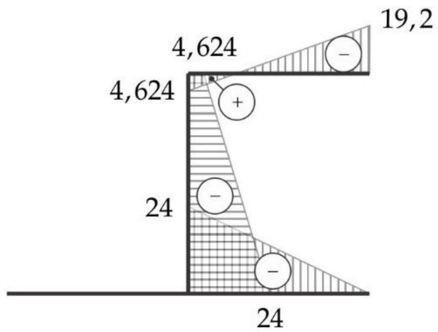




N[kN]

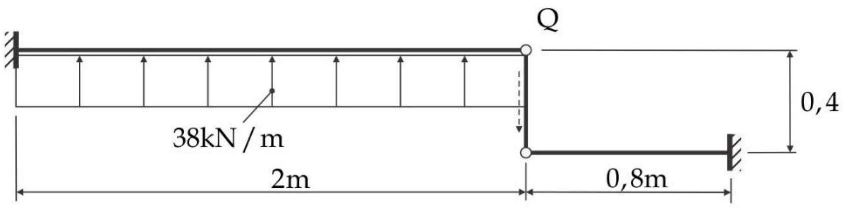


T[kN]

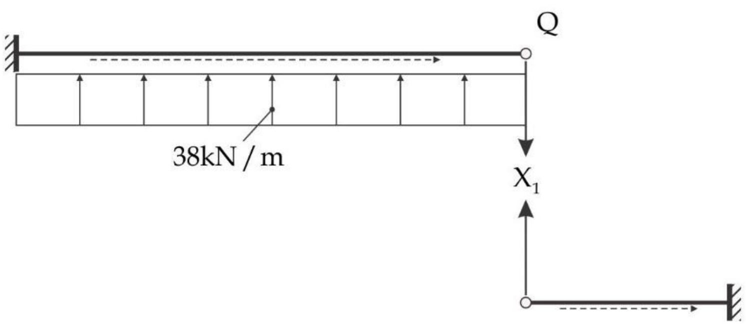


M[kNm]

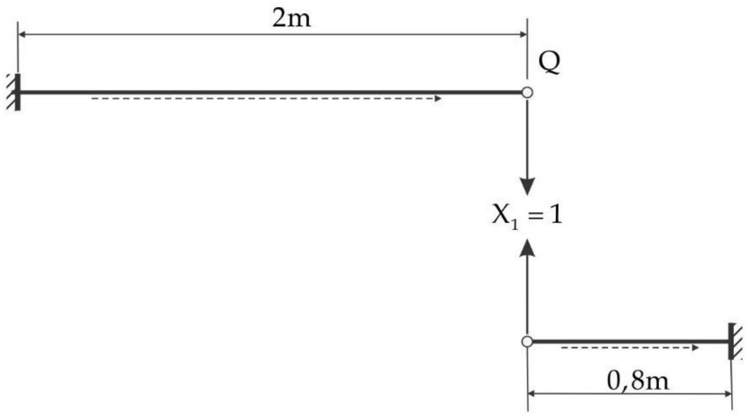
T2. Să se stabilească valoarea proiecției deplasării pe verticală a secțiunii Q; se cunosc: $EI=\mathrm{ct.}$, $E=2,1\cdot 10^5\mathrm{N/mm}^2$, secțiune circulară plină, $d=100\mathrm{mm}$.

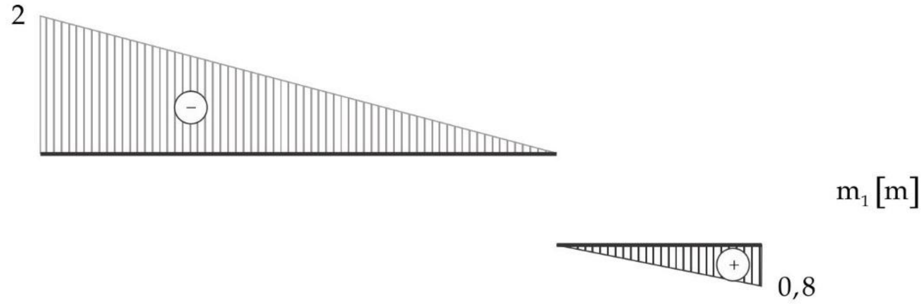


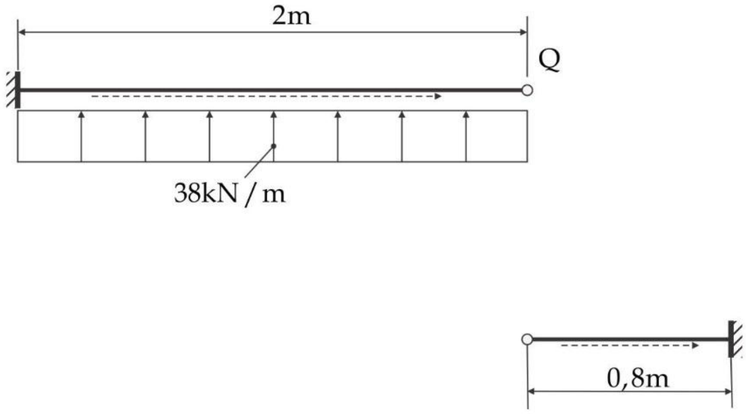
f.b.

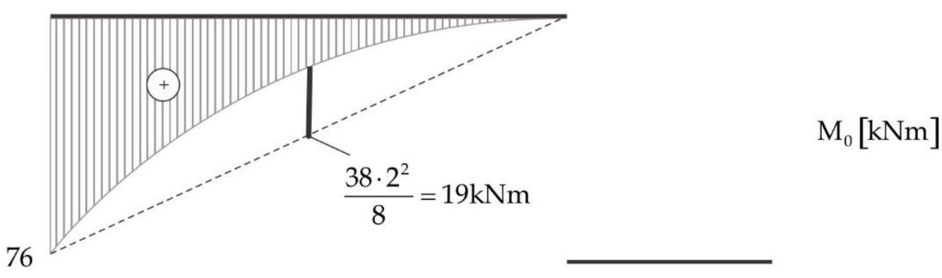


$$\delta_{11}\cdot X_1+\Delta_{10}=0.$$









$$EI\cdot\delta_{11} = [m_1;\ m_1];$$

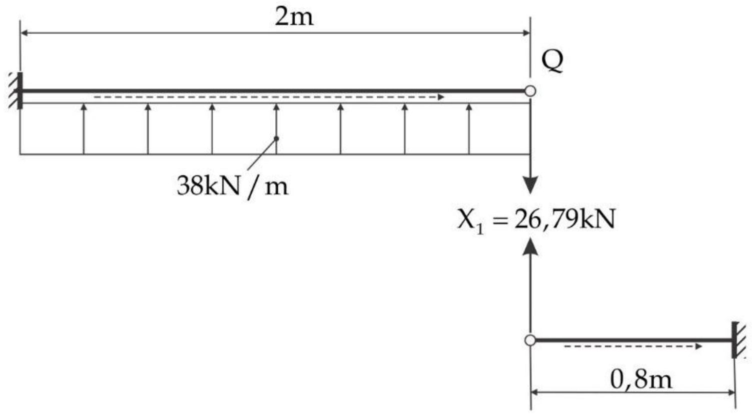
$$EI\cdot\Delta_{10} = [m_1;\ M_0],$$

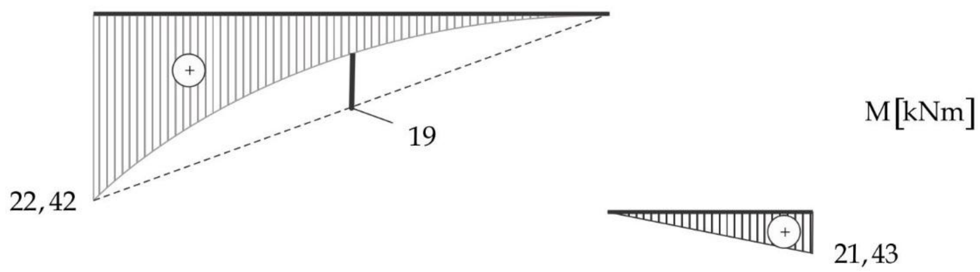
$$EI\cdot\delta_{11} = \frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}2 + \frac{0,8\cdot 0,8}{2}\cdot\frac{2}{3}0,8 \Rightarrow EI\cdot\delta_{11} = 2,837\,m^3;$$

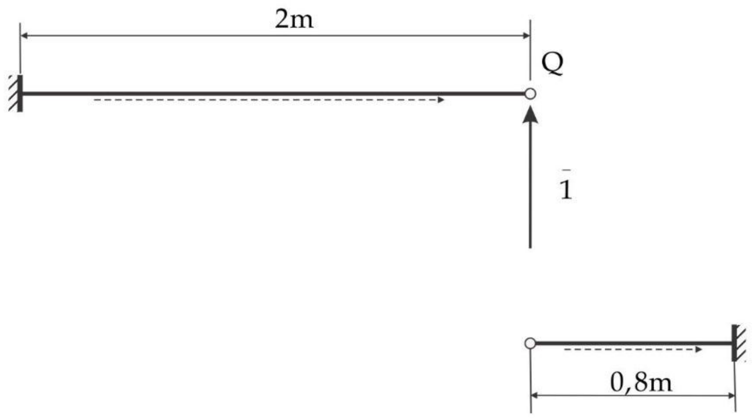
$$EI\cdot\Delta_{10} = -\frac{76\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}2 + \frac{2}{3}\cdot 19\cdot 2\cdot 1 \Rightarrow EI\cdot\Delta_{10} = -76\,\text{kNm}^3,$$

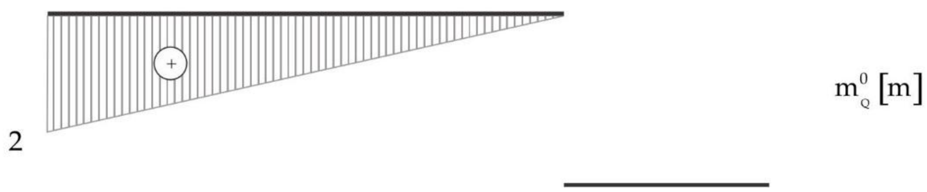
$$\left(\delta_{11}\cdot X_1+\Delta_{10}=0\right);$$

$$X_1=-\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}\Rightarrow X_1=-\frac{\left(-76\text{kNm}^3\right)}{2,837\text{m}^3}=26,79\text{kN}.$$









$$\text{EI}\cdot v_Q=\frac{22,42\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}2-\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 19\cdot 1\Rightarrow \text{EI}\cdot v_Q=4,56\text{kNm}^3;$$

$$v_Q=\frac{4,56\cdot 10^{12}}{2,1\cdot 10^5\cdot\frac{\pi\cdot 100^4}{64}}\Rightarrow v_Q=4,42\text{mm}.$$

Obs. În cazul unui tirant cu lungime semnificativă, pentru precizia rezultatului final se va lua în considerare şi termenul din forţă axială; în cazul de faţă, termenii datoraţi solicitării axial-centrice au fost neglijati.