

4. Trasarea diagramelor de eforturi la sisteme plane de bare drepte / sisteme spațiale

4.4 Sistem de bare cu trei articulații (sistem cu tirant)

Se dorește trasarea diagramelor de eforturi pentru cadrul cu trei articulații din figura de mai jos; datorită faptului că tronsonul 3-4 este articulat de 1-5, prin intermediul semi-articulației 3, din ecuația de momente de forțe în raport cu secțiunea 3, pentru corpul 3-4 rezultă:

$$\Sigma M_3^{3-4} = 0 \Rightarrow H_4 = 0, \quad (5.1)$$

pentru orice tronson de bară articulat la ambele capete, neîncărcat pe lungimea sa, necunoscuta pe direcție normală la axa longitudinală a acestuia fiind nulă. Un astfel de tronson poartă denumirea generică de **tirant** și este solicitat doar la întindere-compresiune centrică.

Se determină valorile reacțiilor din reazemele de interes ale sistemului, astfel:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 &\Rightarrow H_2 = 0; \\ \Sigma M_2 = 0, \quad 20 \cdot 4 \cdot 1 + 230 \cdot 3 - 60 - V_4 \cdot 3 &= 0 \Rightarrow V_4 = 236,67 \text{ kN}; \\ \Sigma M_3 = 0, \quad -V_2 \cdot 3 + 20 \cdot 4 \cdot 2 + 60 &= 0 \Rightarrow V_2 = 73,33 \text{ kN}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

verificare :

$$\Sigma Y = 0, \quad 73,33 - 20 \cdot 4 - 230 + 236,67 = 0.$$

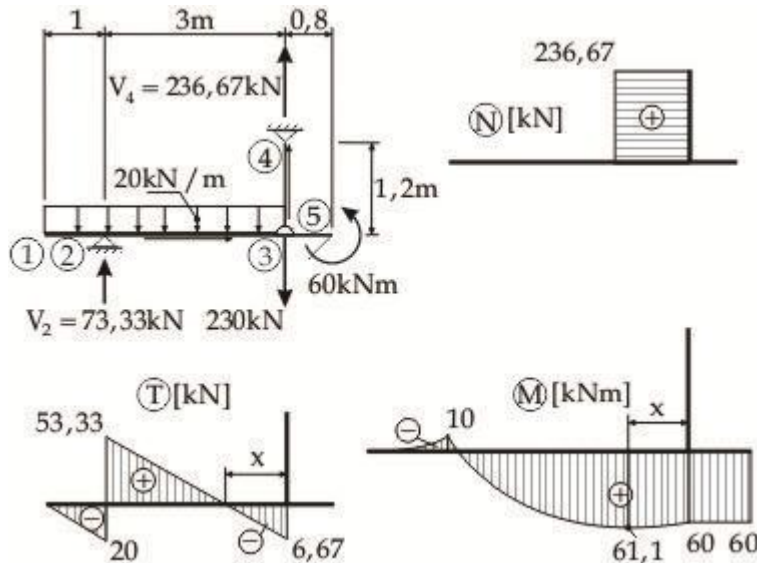


fig.1

Se trasează diagramele de efort secțional conform regulilor prezentate în cadrul cursului 2, astfel:

forța axială,

$$\begin{aligned} N_{1-5} &= 0; \\ N_{3-4} &= 236,67\text{kN}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

forța tăietoare,

$$\begin{aligned} T_{1\text{dr}} &= 0; \\ T_{2\text{st}} &= -20 \cdot 1 = -20\text{kN}; \\ T_{2\text{dr}} &= -20 + 73,33 = 53,33\text{kN}; \\ T_{3\text{st}} &= -20 \cdot 4 + 73,33 = -6,67\text{kN}; \\ x &= \frac{6,67}{20} = 0,33\text{m}; \\ T_{3-5} &= 0; \\ T_{3-4} &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

moment încovoietor,

$$\begin{aligned} M_{3-4} &= 0; \\ M_1 &= 0; \\ M_2 &= -20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -10\text{kNm}; \\ M_x = M_{\text{extr}} &= 6,67 \cdot 0,33 - 20 \cdot 0,33 \frac{0,33}{2} + 60 = 61,1\text{kNm}; \\ M_{3-5} &= 60\text{kNm}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

4.5 Sisteme spațiale de bare

În cazul sistemelor de bare spațiale se pot trasa, în general, un număr de șase diagrame de efort, numărul real al acestora depinzând de schema efectivă de calcul dată. Spre deosebire de sistemele de bare încărcate în planul lor (cadre), locul sensului de parcurs va fi luat de triedrul de referință, ale cărui axe se aleg astfel:



- axa x paralelă cu axa longitudinală a barei;
- axa y uzual pe verticală de sus în jos;
- axa z, astfel încât un observator situat pe axa x, ce privește către origine, "vede" axa y suprapunându-se peste axa z prin rotire în sens orar cu 90° .

Sistemul de axe al triedrului de referință parcurge toate tronsoanele sistemului, trasarea diagramelor de efort făcându-se în concordanță cu convențiile de semn și reprezentare deja stabilite.

Se poate afirma fără greșală că trasarea diagramelor pentru sisteme spațiale de bare reprezintă cazul general al trasării diagramelor la bare drepte sau cadre (sisteme de bare plane, încărcate în planul lor).

4.5.1 Sistem de bare încărcat normal pe planul său

Se cere trasarea diagramelor de efort pentru sistemul de bare din figura 2:

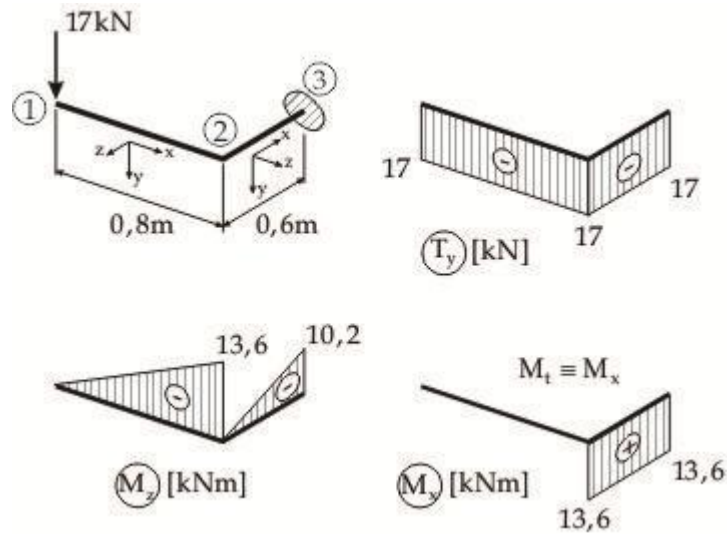


fig.2

Ținându-se seama de schema de încărcare a problemei, din totalul de șase diagrame se trasează doar trei, după cum urmează; în cazul în care schema de rezemare a problemei o permite, se poate renunța la calculul în prealabil al reacțiilor, trasarea diagramelor de efort fiind realizată "privind" în permanență către capătul liber al structurii, astfel:

forță tăietoare T_y ,

$$T_{y1-2} = T_{y2-3} = -17\text{kN}, \quad (5.6)$$

moment încovoietor M_z ,

$$\begin{aligned} M_{z1} &= 0; \\ M_{z2}^{1-2} &= -17 \cdot 0,8 = -13,6\text{kNm}; \\ M_{z2}^{2-3} &= 0; \\ M_{z3}^{2-3} &= -17 \cdot 0,6 = -10,2\text{kNm}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

moment de torsiune sau moment de răsucire M_t (M_x),

$$\begin{aligned} M_{x1-2} &= 0; \\ M_{x2-3} &= 17 \cdot 0,8 = 13,6\text{kNm}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Obs.

1. În cazul trasării corecte a diagramelor de efort, valorile citite în dreptul reazemelor reprezintă chiar reacțiunile corespunzătoare.
2. Momentul încovoietor M_{z2}^{1-2} este identic ca valoare cu momentul de torsiune M_{x2-3} , momentul încovoietor de pe tronsonul 1-2 devenind moment de torsiune pe 2-3, (vezi axele sistemului de referință - axa z de pe tronsonul 1-2 este paralelă cu axa x a tronsonului 2-3).

4.5.2 Sistem spațial de bare

Se trasează diagramele de efort pentru sistemul spațial de bare din figura 3; se va renunța la calculul în prealabil al reacțiunilor, trasarea diagramelor de efort fiind realizată "privind" în permanență către capătul liber al structurii, astfel:

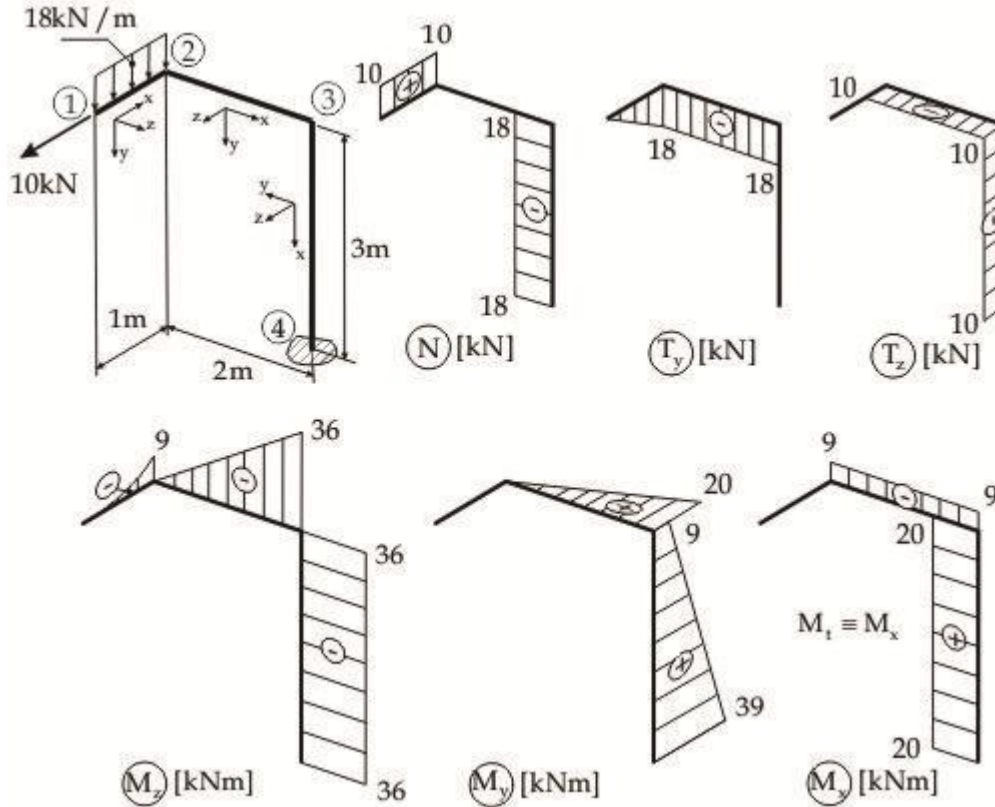


fig.3

forță axială,

$$\begin{aligned} N_{1-2} &= 10\text{kN}; \\ N_{2-3} &= 0; \\ N_{3-4} &= -18 \cdot 1 = -18\text{kN}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

forță tăietoare T_y ,

$$\begin{aligned} T_{y1} &= 0; \\ T_{y2}^{1-2} &= T_{y2-3} = -18 \cdot 1 = -18\text{kN}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

forță tăietoare T_z ,

$$\begin{aligned} T_{z1-2} &= 0; \\ T_{z2-3} &= T_{z3-4} = -10\text{kN}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

moment încovoietor M_z ,

$$\begin{aligned}
 M_{z1} &= 0; \\
 M_{z2}^{1-2} &= -18 \cdot 1 \cdot 0,5 = -9 \text{ kNm}; \\
 M_{z2}^{2-3} &= 0; \\
 M_{z3}^{2-3} &= M_{z3-4} = -18 \cdot 1 \cdot 2 = -36 \text{ kNm},
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

moment încovoietor M_y ,

$$\begin{aligned}
 M_{y1-2} &= 0; \\
 M_{y2}^{2-3} &= 0; \\
 M_{y3}^{2-3} &= 10 \cdot 2 = 20 \text{ kNm}; \\
 M_{y3}^{3-4} &= 18 \cdot 1 \cdot 0,5 = 9 \text{ kNm}; \\
 M_{y4} &= 18 \cdot 1 \cdot 0,5 + 10 \cdot 3 = 39 \text{ kNm},
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

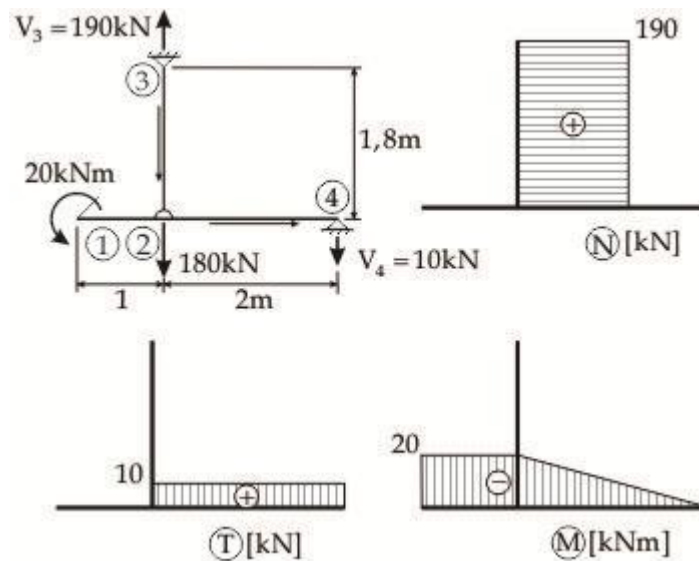
moment de răsucire M_x ,

$$\begin{aligned}
 M_{x1-2} &= 0; \\
 M_{x2-3} &= -18 \cdot 1 \cdot 0,5 = -9 \text{ kNm}; \\
 M_{x3-4} &= 10 \cdot 2 = 20 \text{ kNm}.
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

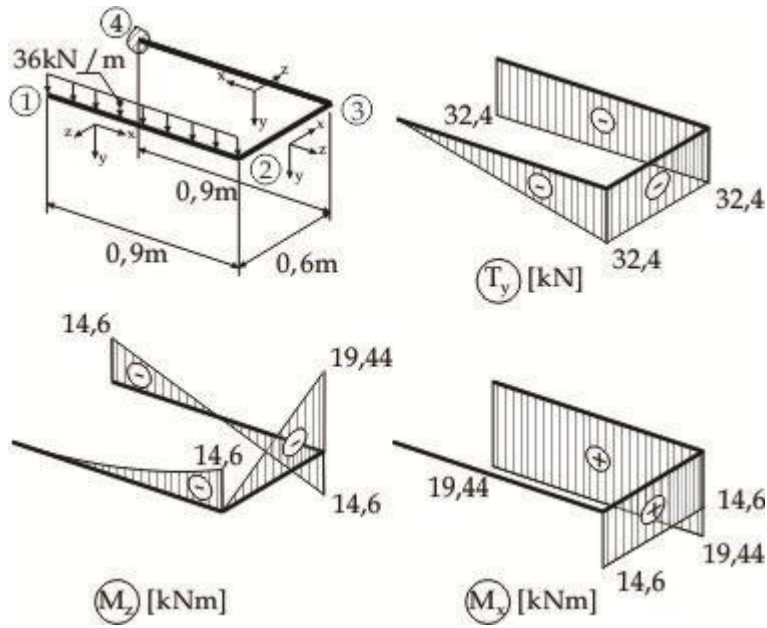
Temă de control

Se cere verificarea corectitudinii trasării diagramelor de efort pentru următoarele scheme de calcul (este necesară parcurgerea algoritmului complet de calcul al diagramelor):

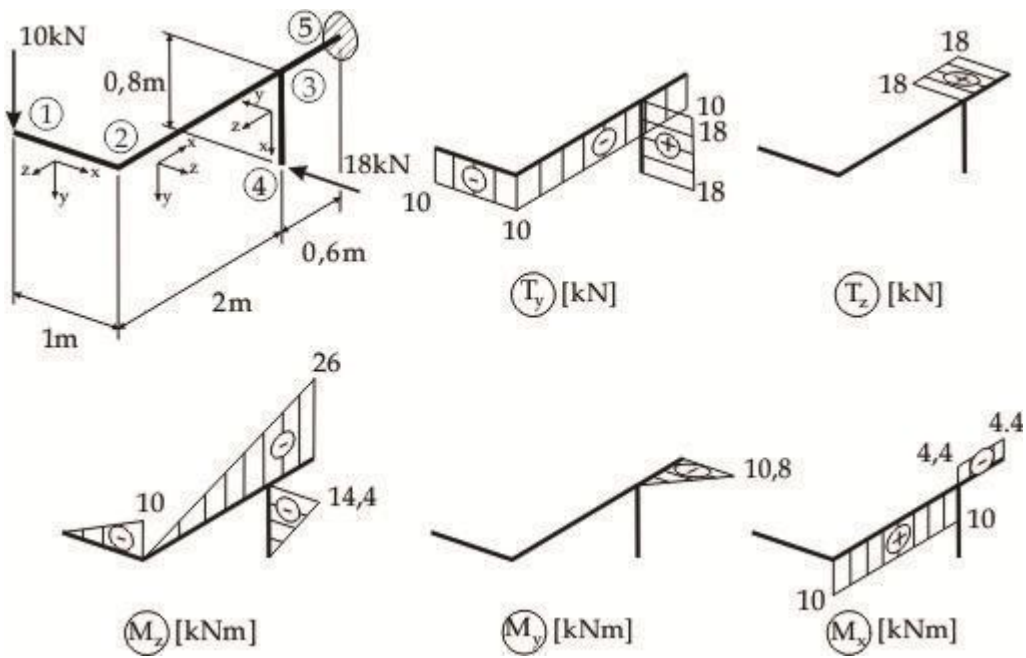
T1



T2



T3



Sugestii de rezolvare și răspunsuri

T1

$$2-3 \text{ tirant} \Rightarrow H_3 = 0;$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad 20 - V_3 \cdot 2 + 180 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_3 = 190 \text{ kN};$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad 20 - V_4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_4 = 10 \text{ kN};$$

verificare,

$$\Sigma Y = 0, \quad 180 - 190 + 10 = 0;$$

$$N_{1-4} = 0;$$

$$N_{2-3} = 190 \text{ kN};$$

$$T_{1-2} = T_{2-3} = 0;$$

$$T_{2-4} = 10 \text{ kN};$$

$$M_{1-2} = -20 \text{ kNm};$$

$$M_{2-3} = 0;$$

$$M_4 = 0.$$

T2

$$T_{y1} = 0;$$

$$T_{y2}^{1-2} = T_{y2-3} = T_{y3-4} = -36 \cdot 0,9 = -32,4 \text{ kN};$$

$$M_{z1} = 0;$$

$$M_{z2}^{1-2} = -36 \cdot 0,9 \cdot \frac{0,9}{2} = -14,6 \text{ kNm};$$

$$M_{z2}^{2-3} = 0;$$

$$M_{z3}^{2-3} = -36 \cdot 0,9 \cdot 0,6 = -19,44 \text{ kNm};$$

$$M_{z3}^{3-4} = 36 \cdot 0,9 \cdot \frac{0,9}{2} = 14,6 \text{ kNm};$$

$$M_{z4}^{3-4} = -36 \cdot 0,9 \cdot \frac{0,9}{2} = -14,6 \text{ kNm};$$

$$M_{x1-2} = 0;$$

$$M_{x2-3} = 36 \cdot 0,9 \cdot \frac{0,9}{2} = 14,6 \text{ kNm};$$

$$M_{x3-4} = 36 \cdot 0,9 \cdot 0,6 = 19,44 \text{ kNm}.$$

T3

$$\begin{aligned}
T_{y1-2} &= T_{y2-5} = -10\text{kN}; \\
T_{y3-4} &= 18\text{kN}; \\
T_{z1-2} &= T_{z2-3} = T_{z3-4} = 0; \\
T_{z3-5} &= 18\text{kN}; \\
M_{z1}^{1-2} &= 0; \\
M_{z2}^{1-2} &= -10 \cdot 1 = -10\text{kNm}; \\
M_{z2}^{2-5} &= 0; \\
M_{z5} &= -10(2 + 0,6) = -26\text{kNm}; \\
M_{z3}^{3-4} &= -18 \cdot 0,8 = -14,4\text{kNm}; \\
M_{z4} &= 0; \\
M_{y1-2} &= M_{y2-3} = M_{y3-4} = 0; \\
M_{y3}^{3-5} &= 0; \\
M_{y5} &= -18 \cdot 0,6 = -10,8\text{kNm}; \\
M_{x1-2} &= M_{x3-4} = 0; \\
M_{x2-3} &= 10 \cdot 1 = 10\text{kNm}; \\
M_{x3-5} &= 10 \cdot 1 - 18 \cdot 0,8 = -4,4\text{kNm}.
\end{aligned}$$