5. Caracteristici geometrice la suprafețe plane I

5.1 Introducere

Presupunând cunoscute mecanismele de evaluare a stării de eforturi la nivelul unei structuri studiate (calcul reacțiuni, trasare diagrame de eforturi), interesează **interdependența** între solicitarea pusă în evidență şi caracteristicile intrinseci ale piesei în discuție; un set de parametri de primă importanță, din acest punct de vedere, îl reprezintă caracteristicile geometrice ale secțiunii elementului structural proiectat sau optimizat.

Obiectivul acestui seminar este de a descrie și a exemplifica algoritmul de calcul al caracteristicilor geometrice ale unei suprafețe plane, indiferent de gradul de complexitate al acesteia.

Vor fi dobândite competențe de stabilire și determinare cantitativă a valorilor corecte ale caracteristicilor geometrice corespunzătoare schemei de calcul date, în scopul utilizării acestora în cadrul treptelor ulterioare ale algoritmului general de rezolvare al unei probleme de Rezistența Materialelor.

Durata medie de studiu individual pentru această prezentare este de circa 120 de minute.

5.2 Exemple de calcul

5.2.1 Secțiune asimetrică

Se cere determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii de mai jos, aceasta neadmițând vreo axă de simetrie.

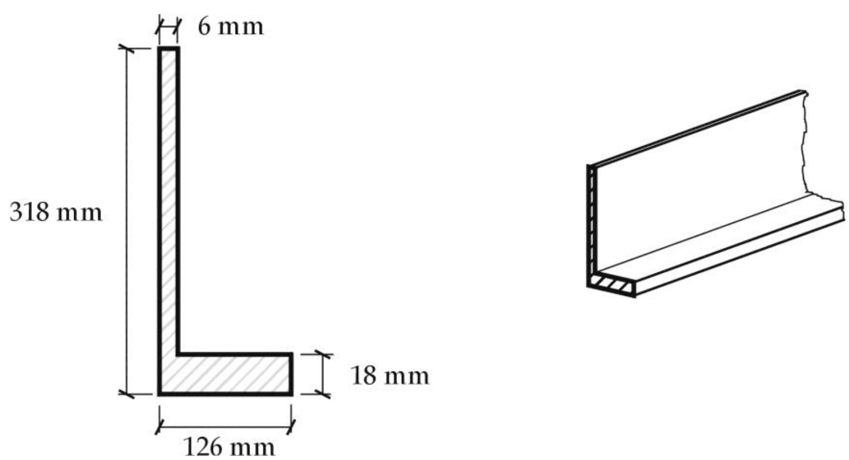


fig.1

Pentru rezolvarea problemei este necesară parcurgerea următorilor pași:

- împărțirea secțiunii în figuri geometrice elementare (dacă este cazul); profilul cornier cu aripi inegale (nestandardizat) din figură poate fi asimilat cu două dreptunghiuri, astfel, fie se va obține o **inimă** cu dimensiunile 318x6 mm (lățime/grosime) şi o **talpă** de 120x18 mm, fie inima de 300x6 mm, respectiv talpa de 126x18 mm (vezi figura 2):

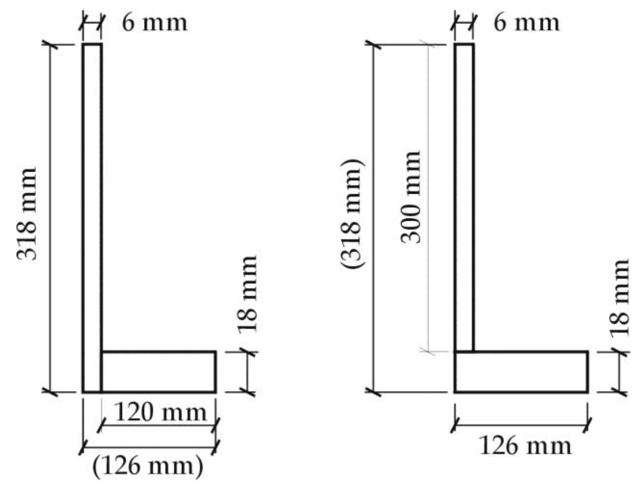


fig.2

Se consideră modul de împărțire din prima variantă propusă, obținându-se astfel secțiunea compusă din două platbande (table) din figura 3:

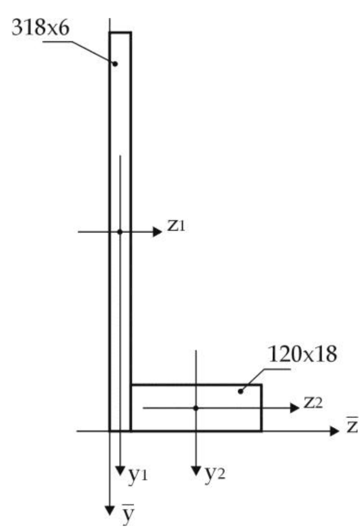


fig.3

- pentru determinarea coordonatelor centrului de greutate se utilizează relațiile din mecanica teoretică:

$$y_G = \frac{\sum_i A_i \cdot y_i}{\sum_i A_i} = \frac{S_{\bar{z}}}{A}; \qquad z_G = \frac{\sum_i A_i \cdot z_i}{\sum_i A_i} = \frac{S_{\bar{y}}}{A}, \tag{6.1}$$

în care s-au notat cu $S_{\bar{z}}, S_{\bar{y}}$ momentele statice față de **axele ajutătoare** $\bar{z}, \bar{y}$ a suprafețelor elementare A_i ce compun secțiunea . Pentru exemplul în discuție, axele ajutătoare s-au trasat prin extremitățile stângă respectiv inferioară a secțiunii, astfel încât originea **momentană** se găseşte în colțul stâng inferior al secțiunii; pot fi alese diverse axe ajutătoare, condiția fiind ca acestea să treacă prin puncte particulare ale elementelor secțiunii (centre de greutate ale elementelor componente, drepte comune, fețe comune de aşezare, etc.), <u>simplitatea calculului depinzând de alegere</u>.

Astfel, prin înlocuire în relații se obțin coordonatele centrului de greutate a secțiunii, în forma:

$$y_G = \frac{318 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{318}{2}\right) + 120 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{18}{2}\right)}{318 \cdot 6 + 120 \cdot 18} = -79{,}35\,\text{mm};$$
$$z_G = \frac{318 \cdot 6 \cdot \left(\frac{6}{2}\right) + 120 \cdot 18 \cdot \left(\frac{120}{2} + 6\right)}{318 \cdot 6 + 120 \cdot 18} = 36{,}45\,\text{mm}, \tag{6.2}$$

semnele negative de la numitorul expresiei datorându-se raportării cotelor corespunzătoare la originea momentană a secțiunii.

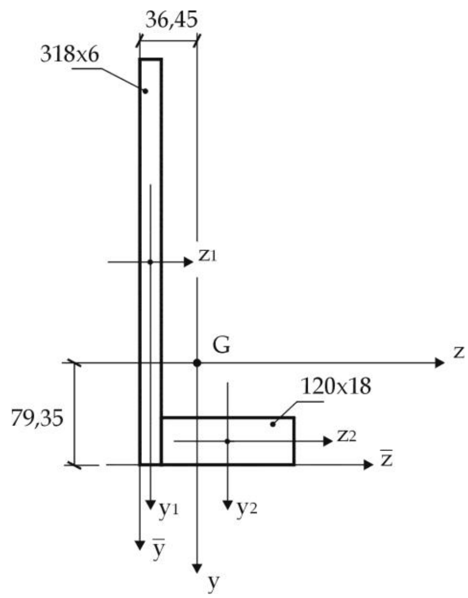


fig.4

Centrul de greutate al secțiunii G (vezi figura 4), se va găsi la intersecția axelor centrale z și y, acesta (centrul de greutate) constituind și **originea finală** a problemei (în raport cu care se vor lua în considerare toate distanțele, până la finele problemei).

- determinarea momentelor de inerție axiale I_z, I_y şi a momentului de inerție centrifugal I_{zy} se face cu ajutorul formulelor lui Steiner (vezi curs), astfel, cu notațiile din figura de mai jos (cazul general al unui dreptunghi de laturi b_i şi h_i), se obține:

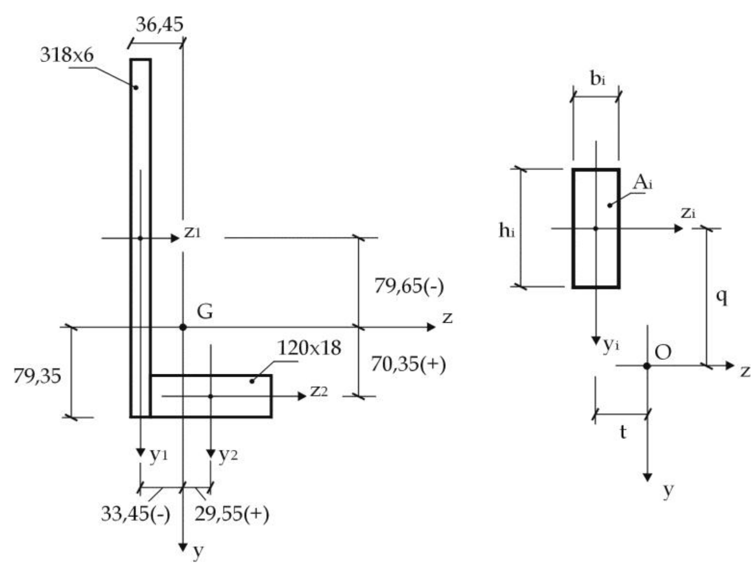


fig.5

$$
\begin{aligned}
I_z &= \sum_i (I_{zi} + A_i \cdot q^2); \qquad I_{zi} = \frac{b_i h_i^3}{12};\\
I_y &= \sum_i \left(I_{yi} + A_i \cdot t^2\right); \qquad I_{yi} = \frac{h_i b_i^3}{12};\\
I_{zy} &= \sum_i \left(I_{zi\ yi} + A_i \cdot q \cdot t\right); \quad I_{zi\ yi} = 0\,(\text{simetrie}).
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Prin particularizarea formulelor generale la cazul problemei studiate, se obține:

$$
\begin{aligned}
I_z &= \frac{6\cdot 318^3}{12} + 6\cdot 318\cdot 79,65^2 + \frac{120\cdot 18^3}{12} + 120\cdot 18\cdot 70,35^2;\\
I_z &= 3,89\cdot 10^7\,\text{mm}^4,\\
I_y &= \frac{318\cdot 6^3}{12} + 318\cdot 6\cdot 33,45^2 + \frac{18\cdot 120^3}{12} + 18\cdot 120\cdot 29,55^2;\\
I_y &= 6,62\cdot 10^6\,\text{mm}^4,\\
I_{zy} &= 0 + 318\cdot 6\cdot(-79,65)\cdot(-33,45) + 0 + 120\cdot 18\cdot(70,35)(29,55);\\
I_{zy} &= 9,57\cdot 10^6\,\text{mm}^4.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

- găsirea momentelor de inerție principale I_1, I_2 și a poziției axelor principale de inerție (unghiul α_1) se face prin utilizarea formulelor generale:

$$
\begin{aligned}
I_{1,2} &= \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4I_{zy}^2},\\
\mathrm{tg}\,2\alpha &= \frac{-2I_{zy}}{I_z - I_y};
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

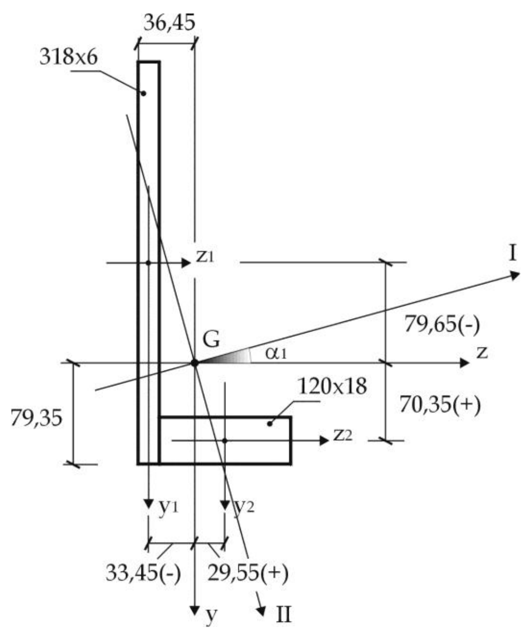


fig.6

prin înlocuire cu valorile anterior determinate, se obține:

$$
\begin{aligned}
& I_{1,2} = \frac{3,89 \cdot 10^7 + 6,62 \cdot 10^6}{2} \pm \\
& \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(3,89 \cdot 10^7 - 6,62 \cdot 10^6\right)^2 + 4 \cdot \left(9,57 \cdot 10^6\right)^2}, \quad (I_1 > I_2); \\
& I_1 = 4,16 \cdot 10^7 \, mm^4, \\
& I_2 = 4 \cdot 10^6 \, mm^4; \\
& tg\, 2\alpha = \frac{-2 \cdot 9,57 \cdot 10^6}{3,89 \cdot 10^7 - 6,62 \cdot 10^6} \Rightarrow \alpha = -15,32^0.
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

S-au găsit în acest fel valorile momentelor de inerţie principale precum şi valoarea unghiului cu care trebuie rotit sistemul de axe centrale (care trec prin centrul de greutate a secţiunii) de referinţă, pentru "a cădea" peste sistemul de axe centrale şi principale de inerţie.

Obs.

1. Cotele cu care se inmulţesc ariile elementelor de la numitorul expresiilor coordonatelor centrului de greutate vor avea semnele corespunzătoare originii momentane a problemei (aflată la intersecţia axelor de referinţă ajutătoare $\overline{z}, \overline{y}$).
2. Centrul de greutate va constitui întotdeauna originea finală a problemei; toate distanţele vor fi evaluate în raport cu această origine (inclusiv semne).
3. Momentele de inerţie principale reprezintă setul de valori extreme (simultan cu obţinerea unui moment de inerţie centrifugal nul) la care se poate ajunge rotind cu unghiul α_1 sistemul de axe centrale de referinţă, existând dealtfel, o infinitate de seturi de valori pentru fiecare poziţie a sistemului de axe rotit cu un unghi oarecare α. Astfel, valorile extreme I_1, I_2 pot fi verificate la modul grosier, I_1 trebuind a fi mai mare decât cea mai mare valoare a momentului de inerţie axial, respectiv I_2 mai mică în raport cu cea mai mică valoare găsită între I_z şi I_y anterior calculate.
4. Axa centrală principală de inerţie I (unu) este acea axă în raport cu care se va măsura cea mai mare valoare a momentului principal de inerţie (I_1); fizic vorbind, această axă este cea faţă de care secţiunea, în ansamblul ei, este cea mai dezvoltată din punct de vedere geometric, poziţa acestei axe fiind dată chiar de unghiul $\alpha = \alpha_1 = -15,32^0$ (semnul pozitiv reprezentând rotirea de la orizontală către sensul pozitiv al axei y).

5.2.2 Secţiune simetrică

Se cere determinarea caracteristicilor geometrice ale suprafeţei secţiunii transversale din figura 7:

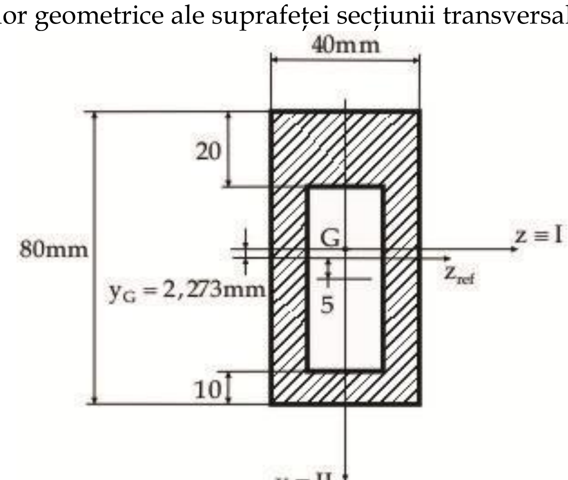


fig.7

Se determină coordonatele centrului de greutate G în raport cu axa ajutătoare z_{ref}; datorită prezenței axei de simetrie y, calculul poziției centrului de greutate este simplificat, centrul de greutate G găsindu-se undeva chiar pe axa de simetrie a secțiunii, astfel se calculează:

$$y_G = \frac{-50 \cdot 20 \cdot 5}{80 \cdot 40 - 50 \cdot 20} = -2,273\text{mm}. \tag{6.7}$$

Prin utilizarea relațiilor Steiner, se determină valorile momentelor de inerție axiale şi centrifugal:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{40 \cdot 80^3}{12} + 40 \cdot 80 \cdot 2,273^2 - \frac{20 \cdot 50^3}{12} - 20 \cdot 50(2,273 + 5)^2 = 1,46 \cdot 10^6 \text{mm}^4; \\ I_y &= \frac{80 \cdot 40^3}{12} - \frac{50 \cdot 20^3}{12} = 3,93 \cdot 10^5 \text{mm}^4; \\ I_{zy} &= 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

valoarea nulă a momentului de inerție centrifugal I_{zy} fiind datorată prezenței axei de simetrie y.

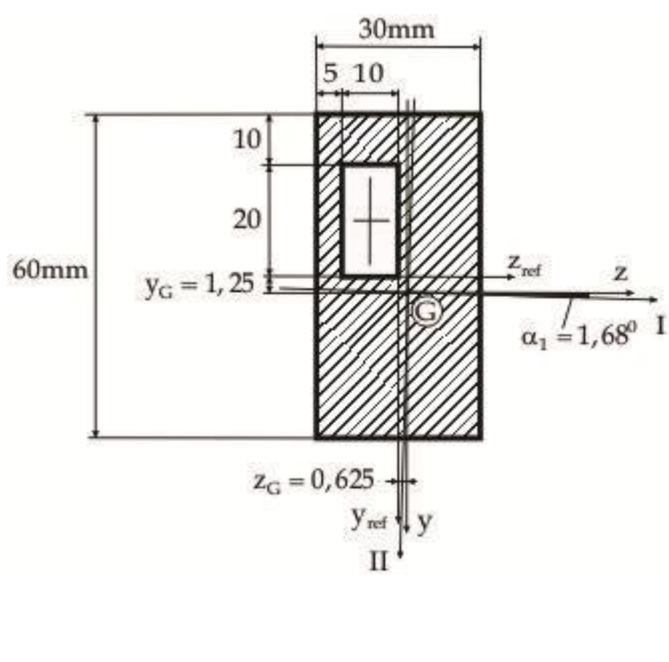
În acest context (I_{zy}=0), unghiul de rotire al axelor de inerție principale I şi II este deasemeni nul, sistemul de referință inițial fiind suprapus peste sistemul de axe principale, prin urmare:

$$\begin{aligned} I_z &= I_1; \\ I_y &= I_2; \\ \alpha_1 &= 0^0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

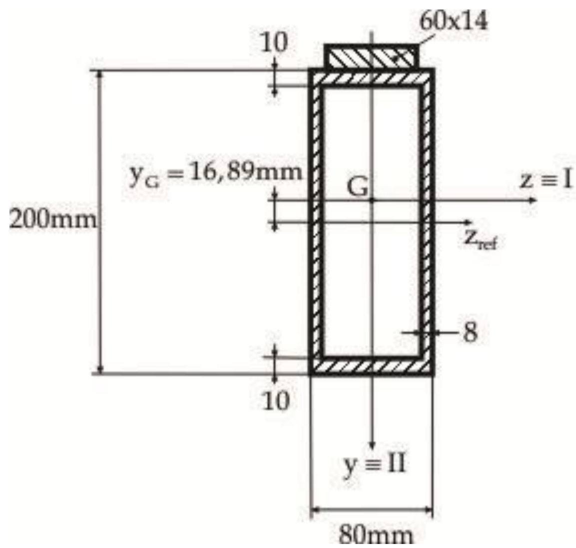
Temă de control

Se cere calculul caracteristicilor geometrice pentru următoarele secțiuni (este necesară parcurgerea algoritmului complet de calcul):

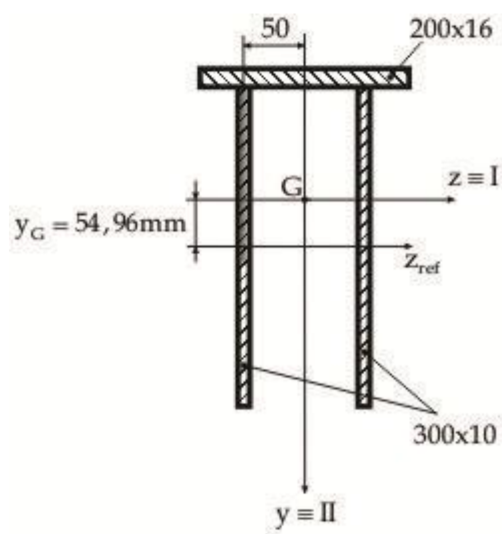
T1



T2


60x14
10
$y_G = 16,89$mm
G
$z \equiv I$
200mm
z_{ref}
8
10
$y \equiv II$
80mm

T3


50
200x16
G
$z \equiv I$
$y_G = 54,96$mm
z_{ref}
300x10
$y \equiv II$

Sugestii de rezolvare și răspunsuri

T1

$$y_G = \frac{-10\cdot 20(-10)}{60\cdot 30-20\cdot 10} = 1,25\text{mm};$$

$$z_G = \frac{-10\cdot 20(-5)}{60\cdot 30-20\cdot 10} = 0,625\text{mm};$$

$$I_z = \frac{30\cdot 60^3}{12} + 30\cdot 60\cdot 1,25^2 - \frac{10\cdot 20^3}{12} - 10\cdot 20(10+1,25)^2 = 5,108\cdot 10^5\,\text{mm}^4;$$

$$I_y = \frac{60\cdot 30^3}{12} + 60\cdot 30\cdot 0,625^2 - \frac{20\cdot 10^3}{12} - 10\cdot 20(5+0,625)^2 = 1,277\cdot 10^5\,\text{mm}^4;$$

$$I_{zy} = 0 + 30\cdot 60(-1,25)(-0,625) - 0 - 10\cdot 20(-11,25)(-5,625) = -1,125\cdot 10^4\,\text{mm}^4;$$

$$I_{1,2} = \frac{5,108\cdot 10^5 + 1,277\cdot 10^5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(5,108\cdot 10^5 - 1,277\cdot 10^5\right)^2 + 4\left(-1,125\cdot 10^4\right)^2} \Rightarrow I_1 = 5,112\cdot 10^5\text{mm}^4,\quad I_2 = 1,274\cdot 10^5\text{mm}^4;$$

$$\text{tg}(2\alpha) = -\frac{2\left(-1,125\cdot 10^5\right)}{\left(5,108\cdot 10^5 - 1,277\cdot 10^5\right)} \Rightarrow \alpha_1 = 1,68^0.$$

T2

$$y_G = \frac{-60\cdot 14\cdot 107}{60\cdot 14+200\cdot 80-180\cdot 64} = -16,9\text{mm};$$

$$I_z = I_1 = \frac{60\cdot 14^3}{12} + 60\cdot 14(107-16,9)^2 + \frac{80\cdot 200^3}{12} + 80\cdot 200\cdot 16,9^2 - \frac{64\cdot 180^3}{12} - 64\cdot 180\cdot 16,9^2 = 3,034\cdot 10^7\,\text{mm}^4;$$

$$I_y = I_2 = \frac{14\cdot 60^3}{12} + \frac{200\cdot 80^3}{12} - \frac{180\cdot 64^3}{12} = 4,85\cdot 10^6\,\text{mm}^4;$$

$$I_{zy} = 0,\quad \alpha_1 = 0.$$

T3

$$y_G = \frac{-200\cdot 16\cdot 158}{200\cdot 16+2\cdot 300\cdot 10} = -54,96\text{mm};$$

$$I_z = I_1 = \frac{200\cdot 16^3}{12} + 200\cdot 16(158-54,96)^2 + 2\left(\frac{10\cdot 300^3}{12} + 10\cdot 300\cdot 54,96^2\right) = 9,72\cdot 10^7\,\text{mm}^4;$$

$$I_y = I_2 = \frac{16\cdot 200^3}{12} + 2\left[\frac{300\cdot 10^3}{12} + 300\cdot 10\left(50-\frac{10}{2}\right)^2\right] = 2,29\cdot 10^7\,\text{mm}^4;$$

$$I_{zy} = 0,\quad \alpha_1 = 0.$$