

8. Solicitarea de încovoiere

8.1 Introducere

Presupunând însușite modalitățile de estimare a variației în lungul tronsoanelor a valorii eforturilor secționale, precum și metodele de calcul a caracteristicilor geometrice ale secțiunii structurilor în discuție, se studiază algoritmi de determinare în ceea ce privește tratarea problemelor de Rezistența Materialelor din punctul de vedere al solicitării de încovoiere (vezi curs 8÷13).

Obiectivul acestui seminar este de a descrie și exemplifica metode de rezolvare a problemelor legate de dimensionarea, verificarea și stabilirea efortului capabil, în cazul solicitării de încovoiere simplă.

Vor fi dobândite competențe de stabilire și determinare cantitativă a valorilor corecte ale caracteristicilor geometrice și ale schemei de încărcare în general, corespunzătoare schemei de calcul date, în scopul utilizării acestora în cadrul treptelor ulterioare ale algoritmului general de rezolvare al unei probleme de Rezistența Materialelor.

Durata medie de studiu individual pentru această prezentare este de circa 120 de minute.

8.2 Exemple de calcul

8.2.1 Încovoiere simplă. Formula lui Navier

Se cere **dimensionarea** barei simplu rezemate cu consolă din figura de mai jos, utilizându-se ambele variante constructive; materialul utilizat admite $\sigma_a = 160\text{N/mm}^2$.

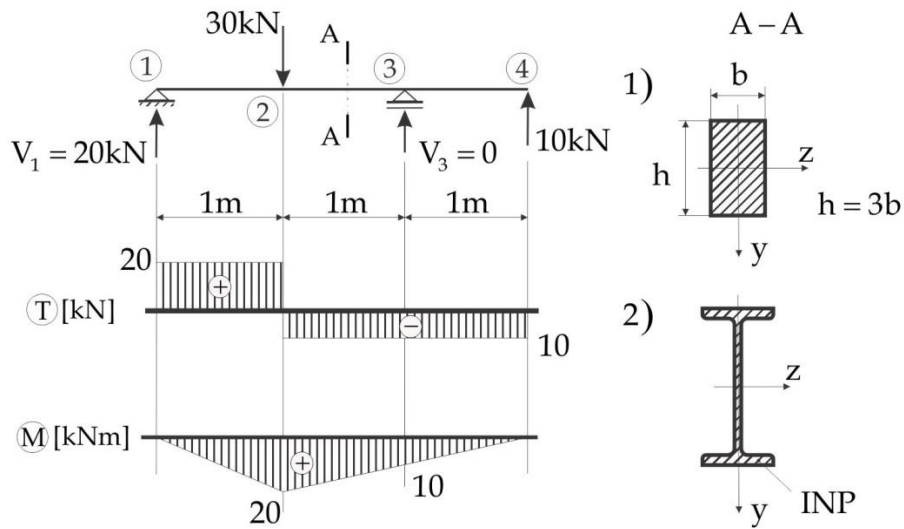


fig.1

Pentru stabilirea formulei de dimensionare (din condiția de rezistență), se pornește de la expresia tensiunii normale maxime conform formulei Navier (curs 8), astfel:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{ef}}}{W_{\text{ef}}}; \quad (11.1)$$

prin particularizare se ajunge, în cazul problemei din figura 1, la:

$$W_{\text{z nec}} = \frac{M_{\text{z max}}}{\sigma_a} \Rightarrow W_{\text{z nec}} = \frac{20 \cdot \overset{\text{kNm} \rightarrow \text{Nmm}}{10^6}}{160} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ mm}^3. \quad (11.2)$$

Modulul de rezistență axial în cazul primei variantei constructive este de forma (caracteristici geometrice la suprafețe plane):

$$W_{\text{z ef}} = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow W_{\text{z ef}} = \frac{b \cdot (3b)^2}{6} = 1,5b^3, \quad (11.3)$$

prin echivalarea expresiilor (11.2) și (11.3) obținându-se:

$$b_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{1,25 \cdot 10^5}{1,5}} = 43,68 \text{ mm}; \quad (11.4)$$

se adoptă $b_{\text{ef}} = 44 \text{ mm}$, $h_{\text{ef}} = 132 \text{ mm}$, reținând, drept criteriu de comparație, aria secțiunii transversale a barei de secțiune dreptunghiulară - $A_{\text{ef}} = 132 \cdot 44 = 5808 \text{ mm}^2 = 58,08 \text{ cm}^2$.

Dimensionarea în cazul celei de-a doua variante constructive se face prin utilizarea directă a tabelului de profile standardizate INP, prin alegerea aceluși profil cu modulul de rezistență axial superior valorii necesare stabilite prin relația de dimensionare (11.2), astfel, se adoptă din tabel (vezi anexe), profilul INP180 cu $W_{\text{z ef}} = 161 \text{ cm}^3$, $A_{\text{ef}} = 27,9 \text{ cm}^2$.

Obs.

Se remarcă diferența mare dintre cele două variante constructive, în ceea ce privește consumul de material (vezi diferența dintre valorile ariilor secțiunii transversale a barei); secțiunea tip I este mai juducios utilizată, materialul fiind dispus după forma diagramei de distribuție a tensiunilor normale σ (vezi formula lui Navier).

Se cere **verificarea** secțiunii consolei din figura de mai jos; $\sigma_a = 140 \text{ N/mm}^2$.

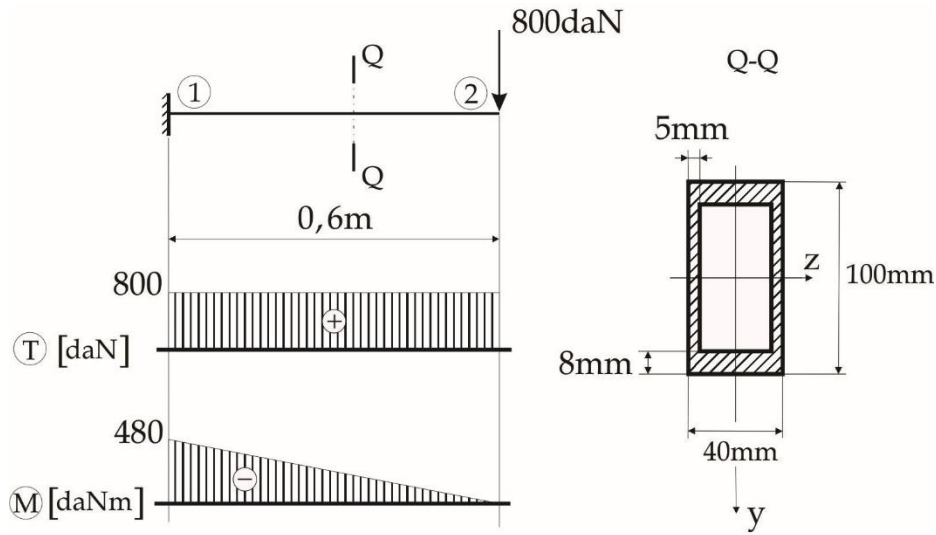


fig.2

Se stabilește valoarea momentului de inerție axial efectiv, în raport cu axa neutră a secțiunii (Oz), astfel:

$$I_{z\text{ef}} = \frac{40 \cdot 100^3}{12} - \frac{30 \cdot 84^3}{12} = 1,852 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \quad (11.5)$$

de unde rezultă modulul de rezistență axial în raport cu axa neutră a secțiunii:

$$\left(W_z = \frac{I_z}{y_{\text{max}}} \right) \Rightarrow W_{z\text{ef}} = \frac{1,852 \cdot 10^6}{50} = 3,703 \cdot 10^4 \text{ mm}^3. \quad (11.6)$$

Se particularizează forma generală a expresiei tensiunii normale maxime, obținându-se formula de verificare din condiția de rezistență la sollicitarea de încovoiere simplă:

$$\sigma_{\text{ef}} = \frac{M_{z\text{max}}}{W_{z\text{ef}}} \Rightarrow \sigma_{\text{ef}} = \frac{480 \cdot 10^4}{3,703 \cdot 10^4} = 129,62 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 140 \text{ N/mm}^2, \quad (11.7)$$

în concluzie, bara rezistă.

Se cere determinarea **efortului capabil** pentru grinda simplu rezemată încărcată pe toată lungimea cu o sarcină uniform distribuită (fig.3), având secțiunea transversală de formă circulară plină de diametru $d = 80 \text{ mm}$; materialul utilizat are $\sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$.

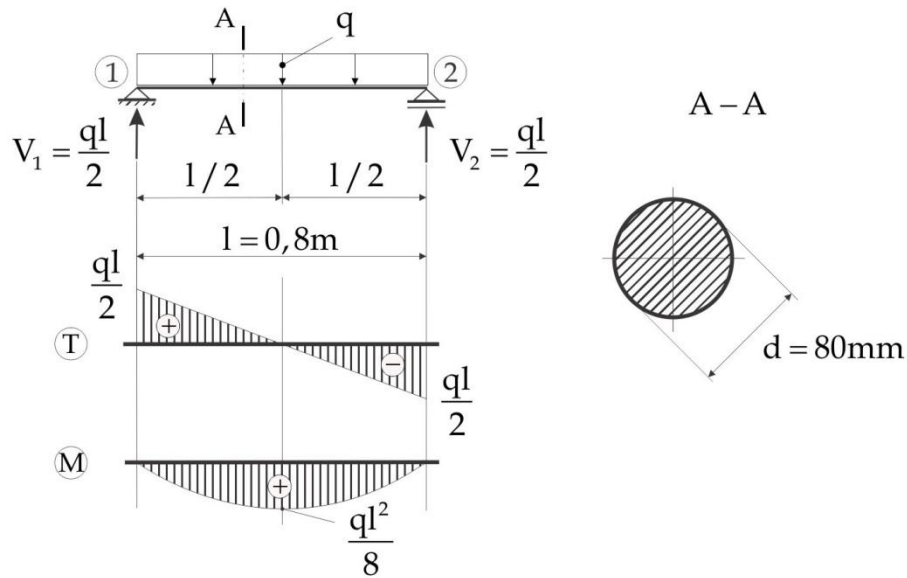


fig.3

Se determină caracteristicile geometrice ale secțiunii:

$$I_{ax} = \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow W_{ax} = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_{ax} = \frac{\pi \cdot 80^3}{32} = 5,03 \cdot 10^4 \text{ mm}^3, \quad (11.8)$$

prin rescrierea convenabilă a relației (11.1) se obține formula efortului capabil la solicitarea de încovoiere simplă, astfel:

$$M_{cap} = W_{ax} \cdot \sigma_a \Rightarrow M_{cap} = 5,03 \cdot 10^4 \cdot 150 = 7,54 \cdot 10^6 \text{ Nmm}. \quad (11.9)$$

Se exprimă în formă literală (simbolică) expresia momentului încovoiitor maxim, din diagrama de moment încovoiitor:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} \Rightarrow M_{max} = \frac{q \cdot 0,8^2}{8} = 8 \cdot 10^{-2} q [\text{Nm}]. \quad (11.10)$$

Se obține valoarea efortului capabil prin echivalarea, la limită, a relațiilor (11.9) și (11.10), astfel:

$$8 \cdot 10^{-2} q \cdot 10^3 \overset{\text{Nm} \rightarrow \text{Nmm}}{=} 7,54 \cdot 10^6 \Rightarrow q = \frac{7,54 \cdot 10^6}{80} = 9,43 \cdot 10^4 \text{ N/m}; \quad (11.11)$$

se adoptă $q_{cap} = 90 \text{ kN/m}$.

Obs.

Se va stabili cu atenție unitatea de măsură corectă a momentului încovoiitor maxim, valoarea finală a efortului capabil determinat fiind de aceeași natură cu aceasta (moment măsurat în Nm, valoare finală a intensității sarcinii uniform distribuite N/m).

Temă de control

T1

Se cere dimensionarea secțiunii consolei din figura de mai jos, materialul utilizat având $\sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$.

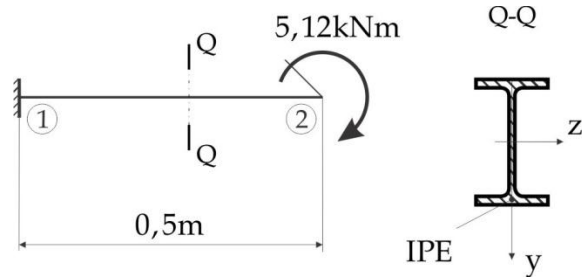


fig.4

T2

Se cere verificarea secțiunii consolei din figura de mai jos, materialul utilizat având $\sigma_a = 160 \text{ N/mm}^2$.

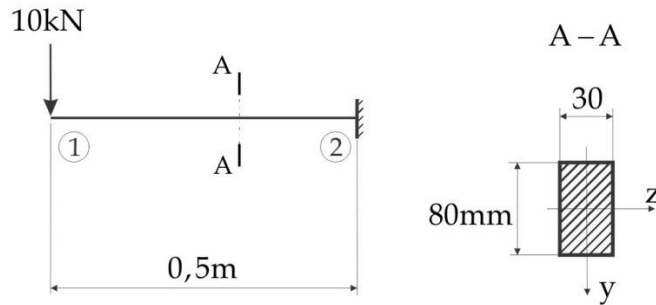


fig.5

T3

Să se găsească mărimea maximă a parametrului Q de care depinde schema de încărcare din figura de mai jos, astfel încât secțiunea să reziste; $\sigma_a = 160 \text{ N/mm}^2$.

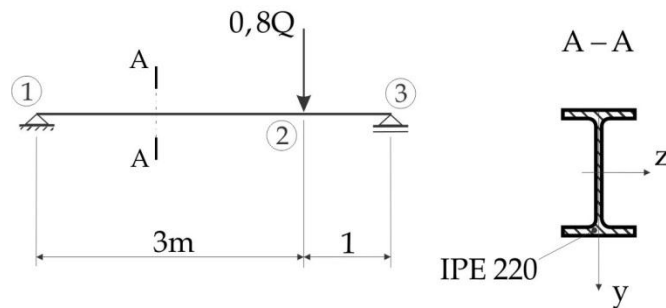


fig.6

Sugestii de rezolvare și răspunsuri

T1

$$W_{z\text{nec}} = \frac{5,12 \cdot 10^6}{150} = 3,41 \cdot 10^4 \text{ mm}^3 = 34,1 \text{ cm}^3;$$

se alege IPE 100 cu $W_{z\text{ef}} = 34,2 \text{ cm}^3$.

T2

$$W_{z\text{ef}} = \frac{30 \cdot 80^2}{6} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^3,$$
$$\sigma_{\text{ef}} = \frac{5 \cdot 10^6}{3,2 \cdot 10^4} = 156,25 \text{ N/mm}^2 < \sigma_a = 160 \text{ N/mm}^2;$$

în concluzie, bara rezistă.

T3

$$M_{z\text{max}} = 0,6Q[\text{Nm}];$$
$$M_{z\text{cap}} = 252 \cdot 10^3 \cdot 160 = 4,032 \cdot 10^7 \text{ Nmm},$$
$$4,032 \cdot 10^7 = 0,6Q \cdot 10^3 \Rightarrow Q = \frac{4,032 \cdot 10^7}{0,6 \cdot 10^3} = 6,72 \cdot 10^4 \text{ N};$$

se adoptă $Q_{\text{cap}} = 65 \text{ kN}$.

8. Solicitarea de încovoiere II

8.2.2 Încovoiere cu forță tăietoare. Formula lui Juravski. Calcul la lunecare

Să se traseze diagrama de distribuție τ_{yx} pentru secțiunea periculoasă a corpului solicitat ca în figura de mai jos și să se efectueze calculul la lunecare la nivelul prinderii tălpii de inimile secțiunii transversale a barei. Se cunosc $\sigma_a = 100 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{as} = 0,65\sigma_a$.

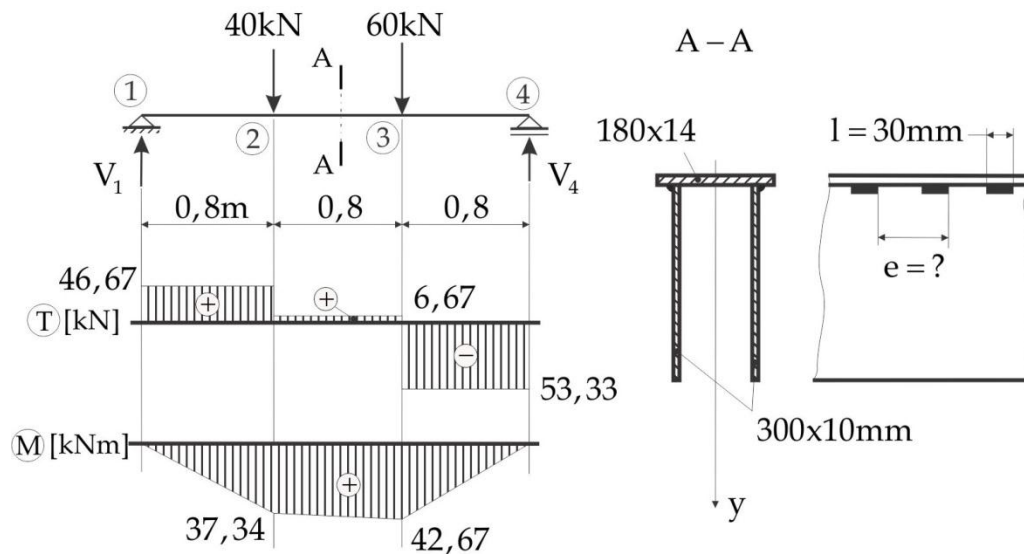


fig.1

După aflarea reacțiilor și trasarea diagramelor de efort (fig.1), se determină caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale, astfel (fig.2):

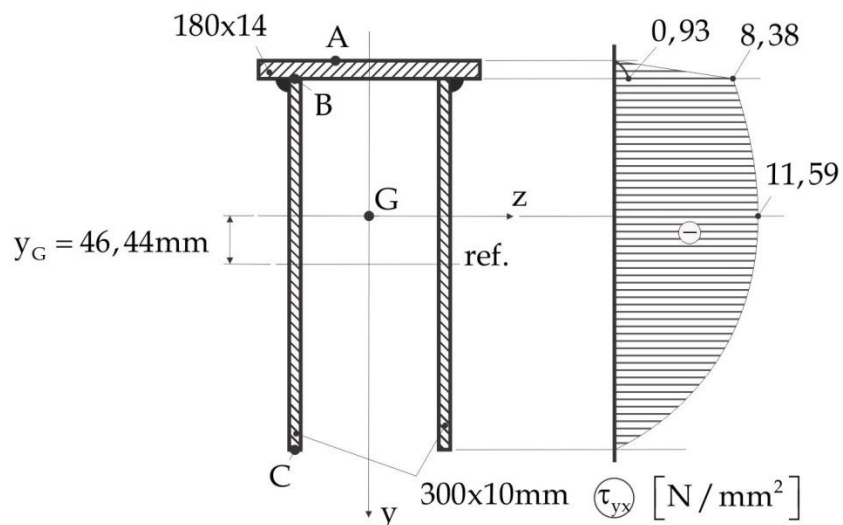


fig.2

- se stabilește poziția centrului de greutate, având drept referință axa ce trece prin centrele de greutate locale ale inimilor secțiunii:

$$y_G = \frac{-180 \cdot 14 \cdot 157}{180 \cdot 14 + 2 \cdot 300 \cdot 10} \Rightarrow y_G = -46,44 \text{ mm}; \quad (12.1)$$

- se determină valoarea momentului de inerție axial în raport cu axa neutră a secțiunii (Oz):

$$I_z = \frac{180 \cdot 14^3}{12} + 180 \cdot 14 \cdot (157 - 46,44)^2 + 2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 300^3}{12} + 10 \cdot 300 \cdot 46,44^2 \right) \Rightarrow I_z = 8,88 \cdot 10^7 \text{ mm}^4; \quad (12.2)$$

- se trasează diagrama de distribuție a tensiunii tangențiale τ_{yx} (fig.2), calculul făcându-se în secțiunea periculoasă 3dr., fiind utilizată formula lui Juravski (curs 9):

$$\begin{aligned} \tau_{yxA} = \tau_{yxB} = 0, \quad (S_{zA} = S_{zC} = 0); \\ \tau_{yxB} = \frac{T_y \cdot S_{zB}}{b_B \cdot I_z}, \quad S_{zB} = 180 \cdot 14 \cdot (157 - 46,44) = 2,79 \cdot 10^5 \text{ mm}^3, \\ \tau_{yxB} = \frac{53,33 \cdot 10^3 \cdot 2,79 \cdot 10^5}{20 \cdot 8,88 \cdot 10^7} = 8,38 \text{ N/mm}^2; \\ \tau_{yxC} = \frac{T_y \cdot S_{zG}}{b_G \cdot I_z}, \quad S_{zG} = 2 \left[10 \cdot (150 + 46,44)^2 \cdot \frac{1}{2} \right] = 3,86 \cdot 10^5 \text{ mm}^3, \\ \tau_{yxC} = \frac{53,33 \cdot 10^3 \cdot 3,86 \cdot 10^5}{20 \cdot 8,88 \cdot 10^7} = 11,59 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (12.3)$$

- se efectuează calculul la lunecare:

$$\begin{aligned} e \leq \frac{N_{\text{cap}}^{\text{imb}} \cdot I_z}{T_y \cdot S_z}, \\ N_{\text{cap}}^{\text{imb}} = 2 \cdot 0,7 \cdot 10 \cdot (30 - 2 \cdot 0,7 \cdot 10) \cdot 0,65 \cdot 100 = 1,46 \cdot 10^4 \text{ N}, \\ S_z = 180 \cdot 14 \cdot (157 - 46,44) = 2,79 \cdot 10^5 \text{ mm}^3; \\ e \leq \frac{1,46 \cdot 10^4 \cdot 8,88 \cdot 10^7}{53,33 \cdot 10^3 \cdot 2,79 \cdot 10^5} \Rightarrow e \leq 87,13 \text{ mm}, \end{aligned} \quad (12.4)$$

se adoptă $e = 80 \text{ mm}$.

Obs.

Se remarcă faptul că la stabilirea lățimii secțiunii la nivelul punctului B, există două variante; dacă se admite că punctul aparține de talpa superioară, valoarea lui $b_b = 180 \text{ mm}$, ceea ce ar conduce la o valoare a tensiunii tangențiale de $0,93 \text{ N/mm}^2$ (fig.2).

În calculul practic se admite trasarea diagramei τ_{yx} de la valoarea nulă (în punctul A) la valoarea de $8,38 \text{ N/mm}^2$, variația fiind liniară.

Temă de control

T1

Să se determine valoarea tensiunii tangențiale $\tau_{yx\max}$ ce se dezvoltă la nivelul secțiunii periculoase a barei simplu rezemate din figura de mai jos:

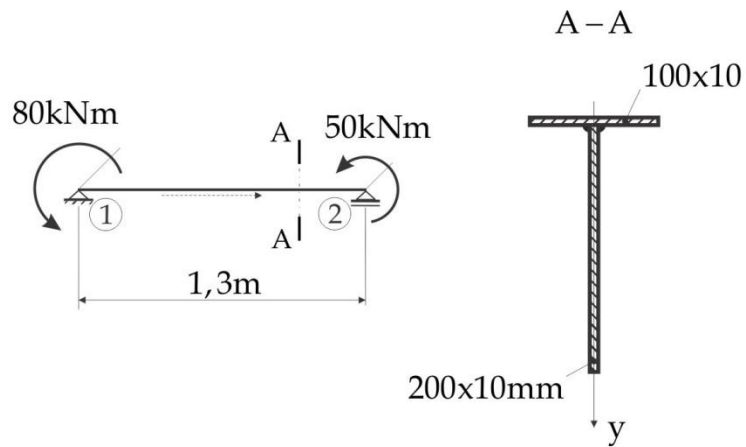


fig.3

T2

Să se efectueze calculul de lunecare pentru schema de calcul din figura de mai jos:

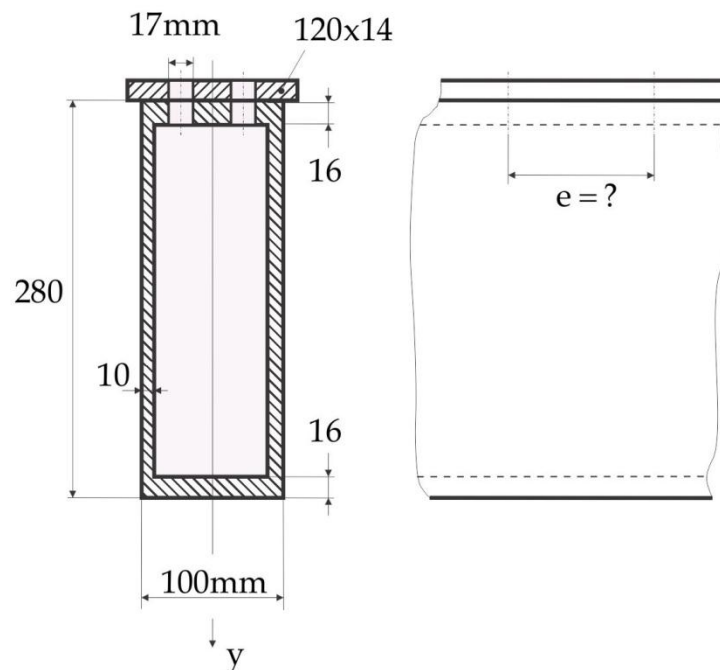


fig.4

Date de intrare ale problemei: $\sigma_a = 160 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\text{astr}} = 2\sigma_a$, $\tau_{\text{af}} = 0,8\sigma_a$, $T_y = 90 \text{ kN}$.

T3

Se cere efectuarea calculului de alunecare pentru secțiunea din figura de mai jos:

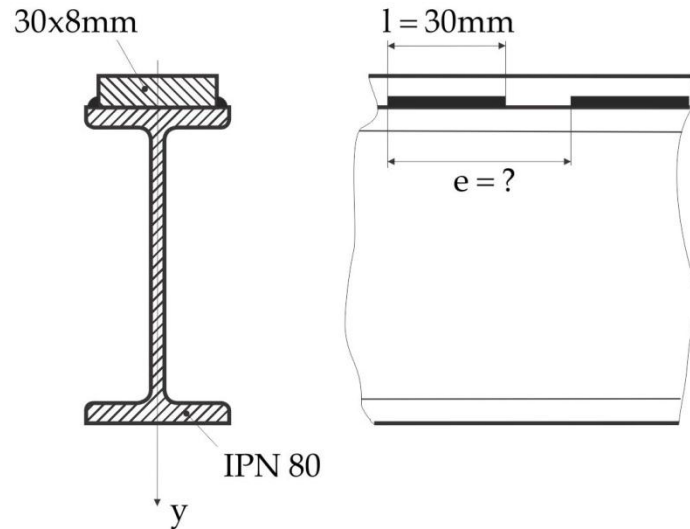
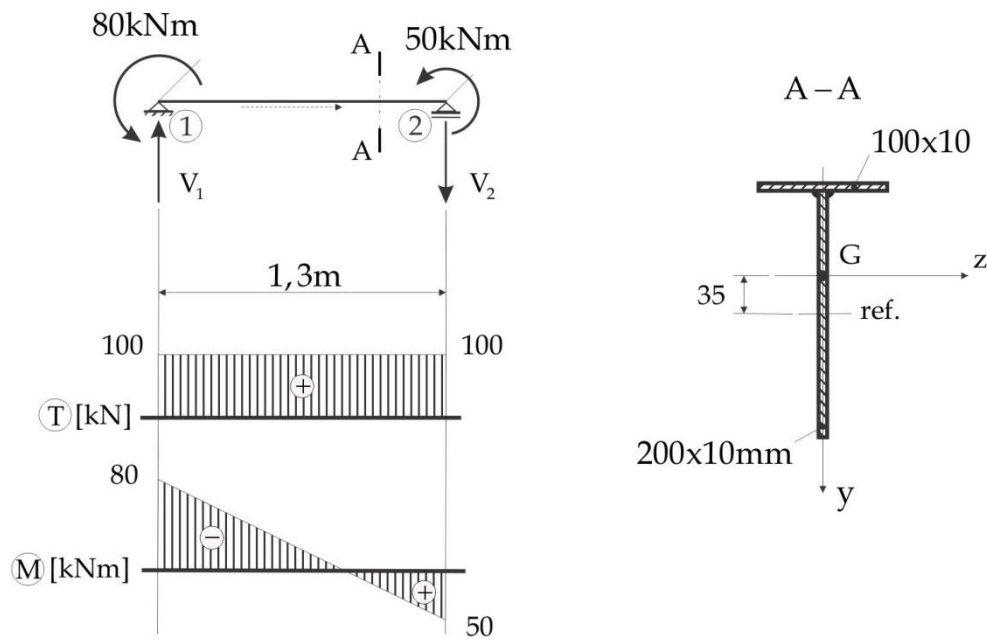


fig.5

Date de intrare ale problemei: $\sigma_a = 180 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{\text{as}} = 0,65\sigma_a$, $T_y = 10 \text{ kN}$.

Sugestii de rezolvare și răspunsuri

T1



$$y_G = \frac{-100 \cdot 10 \cdot 105}{100 \cdot 10 + 200 \cdot 10} = -35 \text{ mm};$$

$$I_z = \frac{100 \cdot 10^3}{12} + 100 \cdot 10 \cdot (105 - 35)^2 + \frac{10 \cdot 200^3}{12} + 10 \cdot 200 \cdot 35^2 = 1,403 \cdot 10^7 \text{ mm}^4;$$

$$\tau_{yx\max} = \tau_{yxG} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 135^2 \cdot \frac{1}{2}}{10 \cdot 1,403 \cdot 10^7} = 64,95 \text{ N/mm}^2.$$

T2

La determinarea centrului de greutate a secțiunii **nu** se ține seama de existența găurilor de nit:

$$y_G = \frac{-120 \cdot 14 \cdot 147}{120 \cdot 14 + 280 \cdot 100 - 248 \cdot 80} = -25,1 \text{ mm};$$

în continuarea calculului, se va utiliza metoda momentului de inerție și a celui static de aceeași natură, știind că $\frac{I_{z\text{ef}}}{S_{z\text{ef}}} \approx \frac{I_{z\text{br.}}}{S_{z\text{br.}}}$ (nu se va ține seama, în continuare, de existența slăbirilor).

$$I_z = \frac{120 \cdot 14^3}{12} + 120 \cdot 14(147 - 25,1)^2 + \frac{100 \cdot 280^3}{12} + 100 \cdot 280 \cdot 25,1^2 - \frac{80 \cdot 248^3}{12} - 80 \cdot 248 \cdot 25,1^2 = 1,114 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

$$\begin{aligned}
S_z &= 120 \cdot 14 \cdot (147 - 25,1) = 2,05 \cdot 10^5 \text{ mm}^3; \\
R_{\text{str}} &= 17 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 160 = 7,62 \cdot 10^4 \text{ N}, \\
R_f &= \frac{\pi \cdot 17^2}{4} \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot 160 = 5,81 \cdot 10^4 \text{ N}, \\
n_{\text{ef}} &= 2, \\
\left. \begin{array}{l} R_{\text{str}} \\ R_f \\ n_{\text{ef}} \end{array} \right\} &\Rightarrow N_{\text{cap}}^{\text{imb}} = 2 \cdot 5,81 \cdot 10^4 \text{ N}; \\
e &\leq \frac{2 \cdot 5,81 \cdot 10^4 \cdot 1,114 \cdot 10^8}{90 \cdot 10^3 \cdot 2,05 \cdot 10^5} \Rightarrow e \leq 701,6 \text{ mm};
\end{aligned}$$

se adoptă $e = 70 \text{ cm}$.

T3

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{-30 \cdot 8 \cdot 44}{30 \cdot 8 + 758} \Rightarrow y_G = -10,58 \text{ mm}; \\
I_z &= \frac{30 \cdot 8^3}{12} + 30 \cdot 8 \cdot (44 - 10,58)^2 + 77,8 \cdot 10^4 + 7,58 \cdot 10^2 \cdot 10,58^2 = 1,132 \cdot 10^6 \text{ mm}^4; \\
S_z &= 30 \cdot 8 \cdot (44 - 10,58) = 8020,8 \text{ mm}^3; \\
N_{\text{cap}}^{\text{imb}} &= 2 \cdot 0,7 \cdot 6 \cdot (30 - 2 \cdot 0,7 \cdot 6) \cdot 0,65 \cdot 180 = 2,123 \cdot 10^4 \text{ N}; \\
e &\leq \frac{2,123 \cdot 10^4 \cdot 1,132 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^3 \cdot 8020,8} \Rightarrow e \leq 299,63 \text{ mm},
\end{aligned}$$

se adoptă $e = 250 \text{ mm}$.