8. Solicitarea de încovoiere III

8.2.3 Deformații la încovoiere. Metoda parametrilor în origine

Pentru grinda simplu rezemată cu consolă din figura de mai jos se cere determinarea rotirii secțiunii 3, φ_3, precum şi a proiecțiilor pe verticală a deplasărlor secțiunilor 2 şi 4, $y_2(=v_2)$, $y_4(=v_4)$; rigiditatea barei se consideră constantă pe toată lungimea, $EI = ct.$, materialul utilizat fiind oțel cu modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young), $E = 2,1 \cdot 10^5 N/mm^2$.

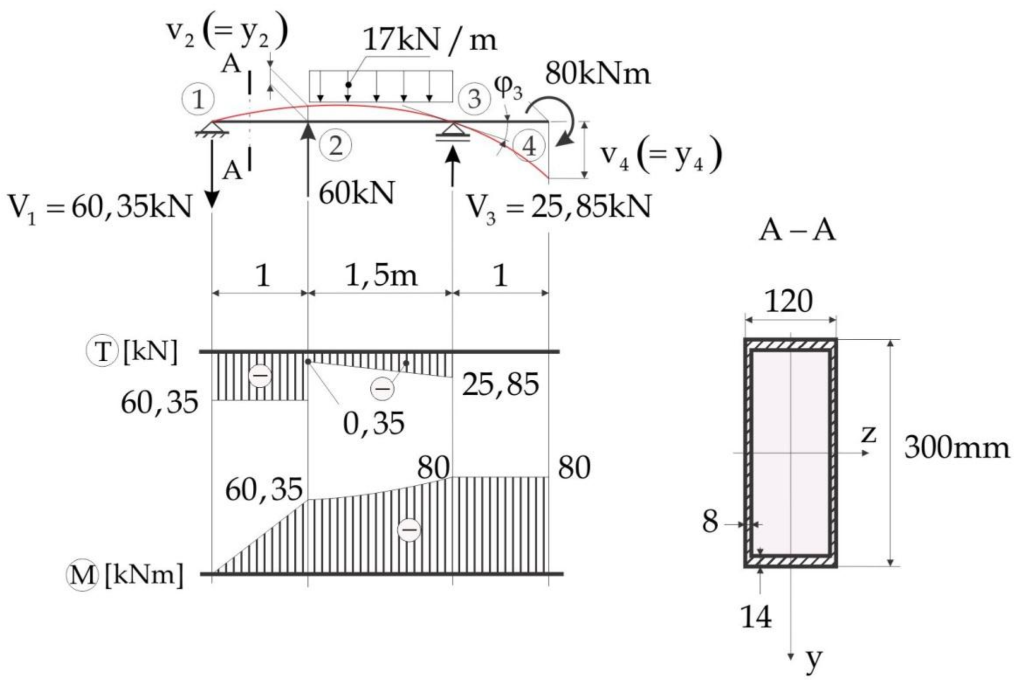

fig.1

După determinarea valorii reacțiunilor din reazeme şi trasarea diagramelor de efort (cu reprezentarea calitativă a fibrei medii deformate) (fig.1), se calculează valoarea momentului de inerție axial, în raport cu axa neutră a secțiunii (Steiner):

$$I_z = \frac{120 \cdot 300^3}{12} - \frac{104 \cdot 272^3}{12} \Rightarrow I_z = 9,56 \cdot 10^7 mm^4; \qquad (13.1)$$

se scriu expresiile generale ale rotirii şi săgeții, prin particularizarea cazului general la problema de față, astfel:

- rotiri

$$EI\varphi = EI\varphi_1 + \frac{60,35 \cdot x^2}{2}\Bigg|_{12} - \frac{60(x-1)^2}{2} + \frac{17(x-1)^3}{6}\Bigg|_{23} - \frac{25,85(x-2,5)^2}{2} - \frac{17(x-2,5)^3}{6}\Bigg|_{34}; \qquad (13.2)$$

- săgeți

$$EIy = EIy_1 + EI\varphi_1 \cdot x + \left.\frac{60,35 \cdot x^3}{6}\right|_{12} - \left.\frac{60(x-1)^3}{6} + \frac{17(x-1)^4}{24}\right|_{23} - \left.\frac{25,85(x-2,5)^3}{6} - \frac{17(x-2,5)^4}{24}\right|_{34}. \quad (13.3)$$

Constantele de integrare (parametrii în origine), se determină din condiții la limită, în cazul de față săgeți nule la nivelul reazemelor 1 şi 3, în consecință se substituie în relația (13.3) valorile coordonatei curente x corespunzătoare celor două reazeme, rezultând ecuațiile:

$$\begin{aligned} &x = 0; \quad y_1 = 0 \Rightarrow 0 = EIy_1, \\ &x = 2,5\,m; \quad y_3 = 0 \Rightarrow 0 = EI\varphi_1 \cdot 2,5 + \frac{60,35 \cdot 2,5^3}{6} - \frac{60 \cdot 1,5^3}{6} + \frac{17 \cdot 1,5^4}{24}; \quad EI\varphi_1 = -50,8\,kNm^2. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Expresiile generale finale ale rotirii şi săgeții se obțin prin substituirea constantelor de integrare (13.4) în expresiile (13.2) şi (13.3), astfel:

- rotiri

$$EI\varphi = -50,8 + \left.\frac{60,35 \cdot x^2}{2}\right|_{12} - \left.\frac{60(x-1)^2}{2} + \frac{17(x-1)^3}{6}\right|_{23} - \left.\frac{25,85(x-2,5)^2}{2} - \frac{17(x-2,5)^3}{6}\right|_{34}; \quad (13.5)$$

- săgeți

$$EIy = -50,8 \cdot x + \left.\frac{60,35 \cdot x^3}{6}\right|_{12} - \left.\frac{60(x-1)^3}{6} + \frac{17(x-1)^4}{24}\right|_{23} - \left.\frac{25,85(x-2,5)^3}{6} - \frac{17(x-2,5)^4}{24}\right|_{34}. \quad (13.6)$$

Se calculează rotirea secțiunii 3 prin înlocuirea în expresia rotirilor (13.5) a parametrului de poziție a secțiunii dorite, $x = 2,5\,m$, până la intervalul 2-3 al expresiei (intervalul de care aparține secțiunea):

$$\begin{aligned} &EI\varphi_3 = -50,8 + \frac{60,35 \cdot 2,5^2}{2} - \frac{60 \cdot 1,5^2}{2} + \frac{17 \cdot 1,5^3}{6} \Rightarrow EI\varphi_3 = 79,86\,kNm^2; \\ &\varphi_3 = \frac{79,86 \cdot \overset{kNm^2 \to Nmm^2}{10^9}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 9,56 \cdot 10^7} \Rightarrow \varphi_3 = 3,98 \cdot 10^{-3}\,rad. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Se determină săgeata secțiunii 2 prin înlocuirea în expresia săgeților (13.6) a parametrului de poziție corespunzător secțiunii în discuție, $x = 1\,m$, până la intervalul 1-2 al expresiei (intervalul de care aparține secțiunea), astfel:

$$\begin{aligned} &EIy_2 = -50,8 \cdot 1 + \frac{60,35 \cdot 1}{6} \Rightarrow EIy_2 = -40,74\,kNm^3; \\ &y_2 = \frac{-40,74 \cdot \overset{kNm^3 \to Nmm^3}{10^{12}}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 9,56 \cdot 10^7} \Rightarrow y_2 = -2,03\,mm, \end{aligned} \quad (13.8)$$

pentru aflarea proiecției pe verticală a deplasării secțiunii 4 înlocuindu-se valoarea $x = 3,5\,m$ în toți termenii expresiei (13.6):

$$
\begin{aligned}
&EIy_4 = -50,8 \cdot 3,5 + \frac{60,35 \cdot 3,5^3}{6} - \frac{60 \cdot 2,5^3}{6} + \frac{17 \cdot 2,5^4}{24} - \frac{25,85}{6} - \frac{17}{24} \Rightarrow EIy_4 = 119,85\,kNm^3; \\
&y_4 = \frac{119,85 \cdot 10^{12}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 9,56 \cdot 10^7} \Rightarrow y_4 = 5,97\,mm.
\end{aligned}
\tag{13.9}
$$

Temă de control

T1

Se cere determinarea proiecției pe verticală a deplasării secțiunii 3 ce aparține de grinda simplu rezemată cu consolă din figura de mai jos; $EI = ct.$

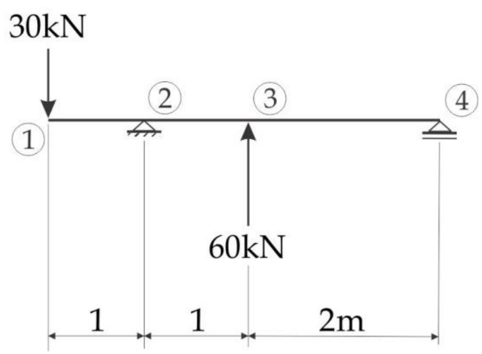

fig.2

T2

Să se afle rotirea secțiunii 1 şi săgeata maximă pentru grinda simplu rezemată din figura 3; $EI = ct.$, $E = 2,1 \cdot 10^5\ N/mm^2$.

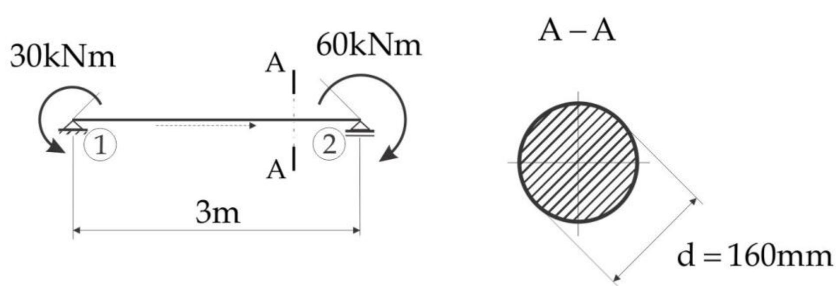

fig.3

T3

Se cer rotirea secțiunii 1 şi săgeata maximă pentru grinda simplu rezematǎ din figura 4; $EI = ct.$, $E = 2{,}1 \cdot 10^5 \ N/mm^2$.

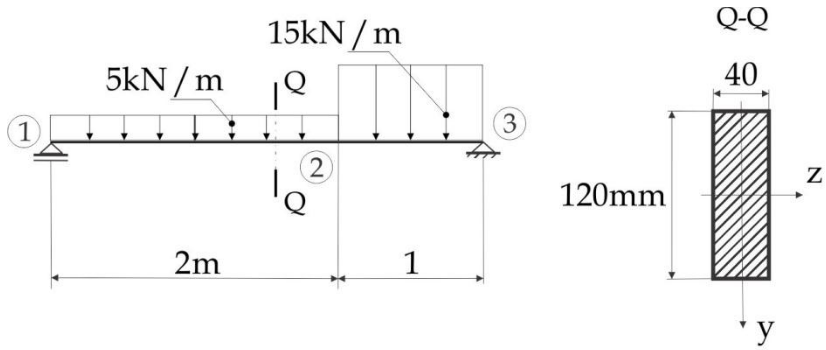

fig.4

Sugestii de rezolvare şi rǎspunsuri

T1

$$EI\varphi = EI\varphi_1 + \frac{30 \cdot x^2}{2}\Big|_{13} - \frac{60(x-2)^2}{2}\Big|_{34};$$

$$EIy = EIy_1 + EI\varphi_1 \cdot x + \frac{30 \cdot x^3}{6}\Big|_{13} - \frac{60(x-2)^3}{6}\Big|_{34};$$

$$\left.\begin{aligned} &x = 1m; \quad y_2 = 0 \Rightarrow 0 = EIy_1 + EI\varphi_1 \cdot 1 + \frac{30}{6}, \\ &x = 4m; \quad y_4 = 0 \Rightarrow 0 = EIy_1 + EI\varphi_1 \cdot 4 + \frac{30 \cdot 4^3}{6} - \frac{60 \cdot 2^3}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow EI\varphi_1 = -78{,}33\,kNm^2, \quad EIy_1 = 73{,}33\,kNm^3;$$

$$x = 2m; \quad EIy_3 = 73{,}33 - 78{,}33 \cdot 2 + \frac{30 \cdot 2^3}{6} \Rightarrow EIy_3 = -43{,}33 \cdot kNm^3.$$

T2

$$EI\varphi = EI\varphi_1 + 30 \cdot x + \frac{10 \cdot x^2}{2}\Big|_{12};$$

$$EIy = EIy_1 + EI\varphi_1 \cdot x + \frac{30 \cdot x^2}{2} + \frac{10 \cdot x^3}{6}\Big|_{12};$$

$$\left.\begin{aligned} &x = 0; \quad y_1 = 0 \Rightarrow 0 = EIy_1, \\ &x = 3m; \quad y_2 = 0 \Rightarrow 0 = EI\varphi_1 \cdot 3 + \frac{30 \cdot 3^2}{2} + \frac{10 \cdot 3^3}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow EI\varphi_1 = -60\,kNm^2, \quad EIy_1 = 0;$$

$$\varphi_1 = \frac{-60 \cdot 10^9}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \dfrac{\pi \cdot 160^4}{64}} \Rightarrow \varphi_1 = -8{,}88 \cdot 10^{-3}\,rad.$$

se egalează expresia rotirilor cu 0 (se anulează prima derivată a săgeții) şi se reține soluția convenabilă:

$$0=-60+30\cdot x+5\cdot x^2,\quad x_{1,2}=-3\pm\sqrt{21}\Rightarrow x_{y_{max}}=1,5826\,\text{m};$$

$$EIy_{max}=-60\cdot 1,5826+\frac{30\cdot 1,5826^2}{2}+\frac{10\cdot 1,5826^3}{6}\Rightarrow EIy_{max}=-50,78\,\text{kNm}^3;$$

$$y_{max}=\frac{-50,78\cdot 10^{12}}{2,1\cdot 10^5\cdot\dfrac{\pi\cdot 160^4}{64}}\Rightarrow y_{max}=-7,52\,\text{mm}.$$

T3

$$EI\varphi=EI\varphi_1-\frac{9,167\cdot x^2}{2}+\frac{5\cdot x^3}{6}\Bigg|_{12}-\frac{5(x-2)^3}{6}+\frac{15(x-2)^3}{6}\Bigg|_{23};$$

$$EIy=EIy_1+EI\varphi_1\cdot x-\frac{9,167\cdot x^3}{6}+\frac{5\cdot x^4}{24}\Bigg|_{12}-\frac{5(x-2)^4}{24}+\frac{15(x-2)^4}{24}\Bigg|_{23};$$

$$\left.\begin{array}{l}x=0;\quad y_1=0\Rightarrow 0=EIy_1,\\ x=3\text{m};\quad y_3=0\Rightarrow 0=EI\varphi_1\cdot 3-\dfrac{9,167\cdot 3^3}{6}+\dfrac{5\cdot 3^4}{24}-\dfrac{5}{24}+\dfrac{15}{24}\end{array}\right\}\Rightarrow EI\varphi_1=7,99\,\text{kNm}^2,\quad EIy_1=0;$$

$$\varphi_1=\frac{7,99\cdot 10^9}{2,1\cdot 10^5\cdot\dfrac{40\cdot 120^3}{12}}\Rightarrow\varphi_1=6,601\cdot 10^{-3}\,\text{rad}.$$

se egalează expresia rotirilor cu 0 şi se reține soluția convenabilă:

$$7,99-\frac{9,167\cdot x^2}{2}+\frac{5\cdot x^3}{6}-\frac{5(x-2)^3}{6}+\frac{15(x-2)^3}{6}=0,\quad x_1=0,35\,\text{m},\ x_2=1,54\,\text{m},\ x_3=3,94\,\text{m}\Rightarrow x_{y_{max}}=1,54\,\text{m};$$

$$EIy_{max}=7,99\cdot 1,54-\frac{9,167\cdot 1,54^3}{6}+\frac{5\cdot 1,54^4}{24}\Rightarrow EIy_{max}=7,89\text{kNm}^3;$$

$$y_{max}=\frac{7,89\cdot 10^{12}}{2,1\cdot 10^5\cdot\dfrac{40\cdot 120^3}{12}}\Rightarrow y_{max}=6,52\,\text{mm}.$$

8. Solicitarea de încovoiere IV

8.2.4 Variația tensiunilor în jurul unui punct

Pe fețele unui element considerat în jurul unui punct, ce aparține de secțiunea unei piese solicitate, se dezvoltă următoarea stare de tensiune : $\sigma_x = 16\,\mathrm{N/mm^2}$, $\sigma_y = -18\,\mathrm{N/mm^2}$, $\tau_{xy} = 22\,\mathrm{N/mm^2}$.

Se cere determinarea tensiunilor normale principale σ_1, σ_2 precum şi unghiul cu care trebuie rotit elementul pentru obținerea acestora (α_1) - unghiul direcțiilor principale de tensiune.

Conform legii dualității tensiunilor tangențiale, starea de tensiune din punctul de interes se completează cu $\tau_{yx} = -\tau_{xy} = -22\,\mathrm{N/mm^2}$; prin reprezentarea grafică pe fețele unui element plan (starea de tensiune este plană, conform indicilor tensiunilor în discuție), se obține:

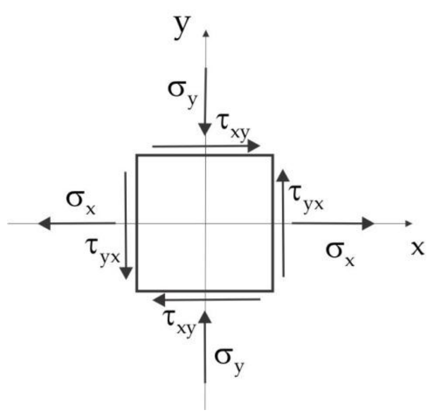

fig.1

Prin utilizarea relațiilor demonstrate (curs 13), se calculează valorile tensiunilor normale principale precum şi unghiul de înclinare a direcțiilor principale de tensiune, astfel:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{16-18}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(16+18)^2 + 4\cdot 22^2},\\
&\sigma_1 = 26{,}8\,\mathrm{N/mm^2};\ \sigma_2 = -28{,}8\,\mathrm{N/mm^2},\\
&\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\cdot 22}{16+18},\\
&\alpha = 26{,}15^0.
\end{aligned} \tag{14.1}$$

Pentru trasarea corectă a direcțiilor principale de tensiune, se estimează domeniul probabil de existență a direcției de tensiune 1 (σ_1), acesta fiind cuprins între direcția celei mai mari tensiuni normale (în mărime algebrică) şi diagonala întinsă a elementului presupus a fi încărcat doar cu tensiuni tangențiale (zona accentuată din figura 2), obținându-se în final:

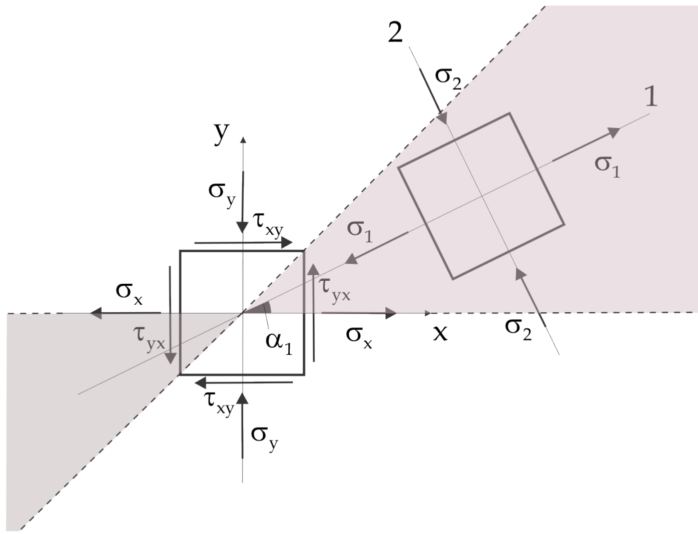

fig.2

în consecință (în cazul de față), $\alpha_1 = 26,15^0$.